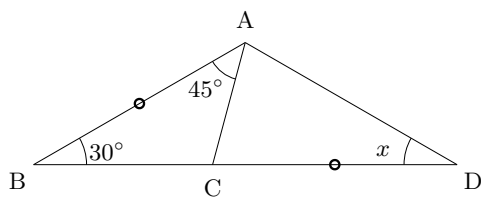


【角度の問題】問題 4''''

問 図のように三角形 ABD があり、AB と CD の長さが等しいとき、 $\angle ADC$ を求めなさい。

1993 年算数オリンピック・決勝・問題 4 の類題 5



【解答】

AB = CD であるから、三角形 ABC と合同な三角形 DCE を図のように作ると、

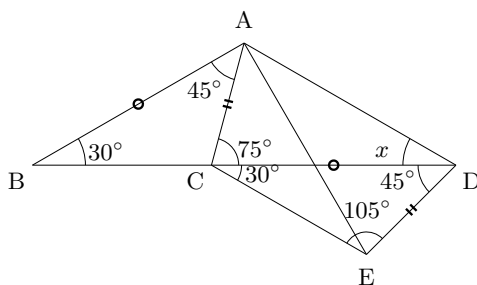
$$\angle ACE = \angle ACD + \angle DCE = (30^\circ + 45^\circ) + 30^\circ = 105^\circ$$

$$\angle DEC = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$$

よって、 $\angle ACE = \angle DEC$, $AC = DE$ が成り立つから、四角形 ACED は AD // CE の等脚台形である。

(三角形 ACE と三角形 DEC は 2 辺とその間の角が、それぞれ等しいので合同である。)

錯角が等しいので、 $\angle CDA = \angle DCE = 50^\circ$



別解 1 三角形 ABC と合同な三角形 CEA を図のように作ると、四角形 ABCE は平行四辺形となる。

よって $\angle DCE = \angle AEC = \angle DBA = 30^\circ$

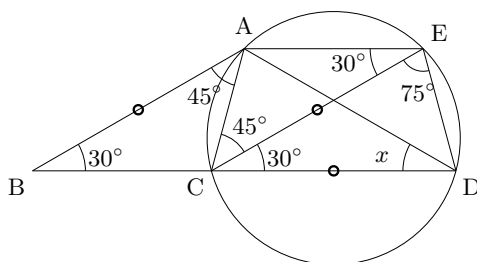
$\triangle DCE$ は $CD = CE$ の二等辺三角形であるから、

$$\angle CED = \angle CDE = \frac{1}{2} (180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$$

$$\angle ACD + \angle AED = (45^\circ + 30^\circ) + (30^\circ + 75^\circ) = 180^\circ$$

よって、四角形 ACDE は円に内接する。

$$\angle ADC = \angle AEC = 30^\circ$$



別解 2 $\angle ACD = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$

辺 BD 上に $BE = BA$ となる点 E をとると

$$BE = DC \dots\dots ①$$

$$\angle BEA = \frac{1}{2} (180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ = \angle ACE \dots\dots ②$$

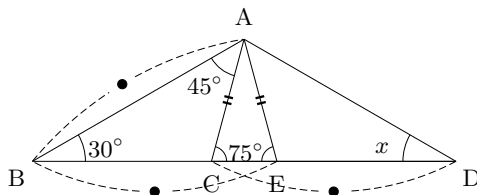
よって、 $\triangle ACE$ は

$$AC = AE \dots\dots ③$$

の二等辺三角形となる。

①, ②, ③ より $\triangle BEA \equiv \triangle DCA$

$$\angle ADC = \angle ABE = 30^\circ$$



原図 $\angle A = 80^\circ$ の二等三角形 ABC がある。

辺 BC 上に $CP = CA$ となる点 P をとると、

$$AB = PC, \angle BAP = 80^\circ - 65^\circ = 15^\circ$$

となり条件を満たす図形ができる。

