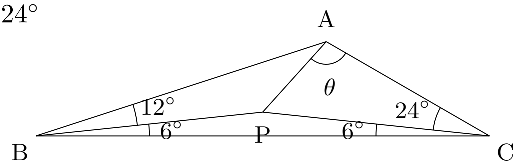
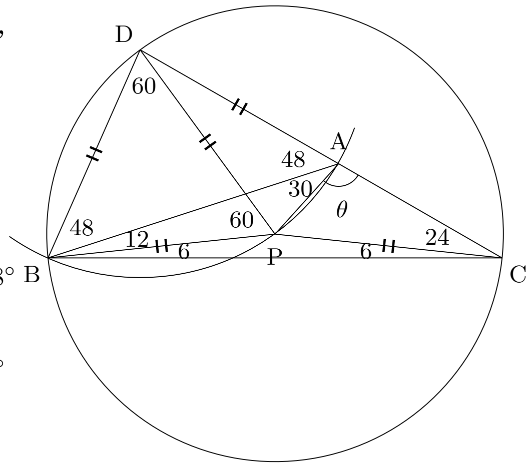
整角三角形 T(12, 6, 6, 24)

$\boxed{\text{問}}$ $\triangle$ABC の内部に点 P を
$\angle\text{PBA} = 12^\circ,\ \angle\text{PBC} = 6^\circ,\ \angle\text{PCB} = 6^\circ,\ \angle\text{PCA} = 24^\circ$
となるようにとるとき、$\angle$PAC の大きさを求めよ。



$T(10,\ 10,\ 10,\ 20)$ の解法と同じ
図において，単位 (°) は省略する。
点 D が直線 BP から見て点 C と反対側にくるように，
正三角形 BPD を作る。
PB = PC = PD より，点 P は $\triangle$BCD の外心である。
$\angle\text{BCD} = \dfrac{1}{2}\angle\text{BPD} = \dfrac{1}{2}\cdot 60^\circ = 30^\circ = \angle\text{BCA}$
点 A は線分 CD 上にある。
$\angle\text{DBA} = 60^\circ - 12^\circ = 48^\circ$
$\angle\text{DAB} = \angle\text{ABC} + \angle\text{ACB} = 12^\circ + 6^\circ + 6^\circ + 24^\circ = 48^\circ$
よって，$\triangle$DAB は DA = DB の二等辺三角形である。
DA = DB = DP より，点 D は $\triangle$ABP の外心である。
$\angle\text{BAP} = \dfrac{1}{2}\angle\text{BDP} = \dfrac{1}{2}\cdot 60^\circ = 30^\circ$
$\angle\text{PAC} = 180^\circ - (48^\circ + 30^\circ) = \mathbf{102^\circ}$



【予備知識】$a + b + c + d = 60^\circ - a,\ b = c,\ c + d = 30^\circ$
つまり，$2a + b = 30^\circ,\ c = b,\ d = 2a$ のとき
点 D が直線 BP から見て点 C と反対側にくるように，
正三角形 BPD を作ると，点 A は線分 CD 上にある。
また，点 D は $\triangle$ABP の外心であるから
$\angle\text{BAP} = \dfrac{1}{2}\angle\text{BDP} = \dfrac{1}{2}\cdot 60^\circ = 30^\circ$
よって，
$\angle\text{PAC} = 180^\circ - \{(60^\circ - a) + 30^\circ\} = \boldsymbol{a + 90^\circ}$

$$
\begin{aligned}
(a,\ b,\ c,\ d,\ e) &= (5,\ 20,\ 20,\ 10,\ 95),\ (6,\ 18,\ 18,\ 12,\ 96) \\
&= (8,\ 14,\ 14,\ 16),\ (10,\ 10,\ 10,\ 20,\ 100) \\
&= (12,\ 6,\ 6,\ 24)
\end{aligned}
$$