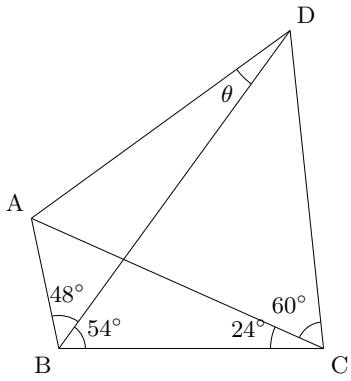
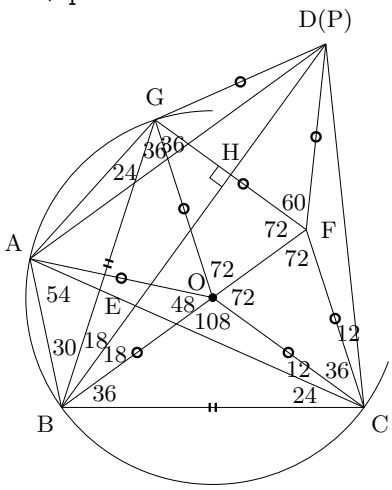
【整角四角形 $Q(48,\ 54,\ 24,\ 60)$】

図の θ の角度を求めよ。



【解答 1】図において，単位 (°) は省略する。

https://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q13332557358



$2\cdot 54^\circ = 108^\circ,\ 36^\circ = 2\cdot 18^\circ,\ 54^\circ = 3\cdot 18^\circ,\ 72^\circ = 4\cdot 18^\circ$

$54^\circ = 18^\circ + 36^\circ,\ 72^\circ - 54^\circ = 18^\circ$

$\angle \mathrm{BAC} = 180^\circ - (48^\circ + 54^\circ + 24^\circ) = 54^\circ$

△ABC の外心を O とすると，$\angle \mathrm{BOC} = 2\angle \mathrm{BAC} = 108^\circ$

$\angle \mathrm{OBC} = \angle \mathrm{OCB} = 36^\circ$

線分 BO の O 側の延長上に点 F を $\mathrm{BF} = \mathrm{BC}$ となるようにとると

△COF ∽ △BCF である。

ともに，**正五角形**の中にできる二等辺三角形である。

$\mathrm{BO} = \mathrm{OC} = \mathrm{CF}$

$\angle \mathrm{FCD} = (24^\circ + 60^\circ) - 72^\circ = 12^\circ$

$\angle \mathrm{FBD} = 54^\circ - 36^\circ = 18^\circ$

線分 BF に関して，点 C と対称な点を G とすると

$\angle \mathrm{GBD} = 36^\circ - 18^\circ = 18^\circ = \angle \mathrm{FBD}$

よって，線分 BD は線分 FG の垂直二等分線である。

正三角形 PFG を点 D 側に作ると，点 P は直線 BD 上にある。

$\mathrm{FP} = \mathrm{FC},\ \angle \mathrm{CFP} = 360^\circ - (60^\circ + 72^\circ + 72^\circ) = 156^\circ$

$\angle \mathrm{FCP} = \angle \mathrm{FPC} = \dfrac{1}{2}(180^\circ - 156^\circ) = 12^\circ = \angle \mathrm{FCD}$

点 P は直線 CD 上にある。

点 P は直線 CD と直線 BD の交点であるから，点 D と一致する。

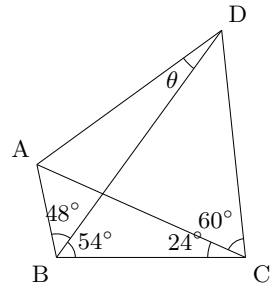
△FCD ≡ △OCA だから △ACD は正三角形である。

$\angle \mathrm{BDC} = 180^\circ - (54^\circ + 24^\circ + 60^\circ) = 42^\circ$

$\theta = 60^\circ - 42^\circ = \mathbf{18^\circ}$

【整角四角形 $Q(48,\ 54,\ 24,\ 60)$】

図の θ の角度を求めよ。



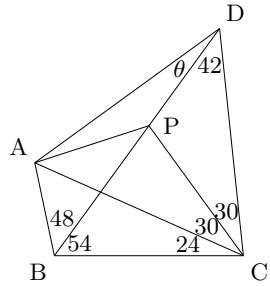
【解答 2】図において，単位 (°) は省略する。

△ACD が正三角形であることが証明できれば

$\theta = 60° - 42° = 18°$

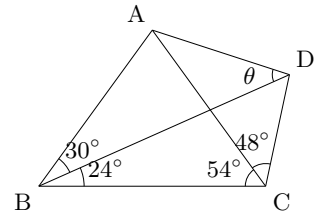
そのために，∠ACD の二等分線と線分 BD との交点を P とすると △ACP ≡ △DCP を証明すればよい。

これは，整角四角形 $Q(30,\ 24,\ 54,\ 48)$ の解が $\theta = 42°$ であることを示すことである。



【整角四角形 $Q(30,\ 24,\ 54,\ 48)$】

図の θ の角度を求めよ。



【$Q(30,\ 24,\ 54,\ 48)$ の解答】図において，単位 (°) は省略する。

線分 AB に関して点 C と同じ側に AB を一辺とする正三角形 ABE を作ると，

∠ABC = ∠ACB = 54° より AB = AC = AE となり

△ACE は頂角が 12° の二等辺三角形である。

∠ABD = 30° より，線分 BD は線分 AE の垂直二等分線である。

4 点 A, E, C, D が**同一円周上にある**ことを示す。

△ACE の外接円と直線 CD との交点を P とする。

四角形 AECP は円に内接し，

∠ECP = ∠ECA + ∠ACP = (30° + 54°) + 48° = 132° より

∠EAP = 180° − 132° = 48° ……①

円周角の定理より，

∠AEP = ∠ACP = 48° ……②

①, ② より ∠AEP = ∠EAP

よって，△PAE は PA = PE の二等辺三角形であり，

点 P は AE の垂直二等分線上にある。つまり，点 P は直線 BD 上にある。

点 P は直線 CD と直線 BD の交点であるから，点 D と一致する。

したがって，4 点 A, E, C, D は同一円周上にある。

AE ⊥ BD より $\theta = 90° - 48° =$ **42°**

