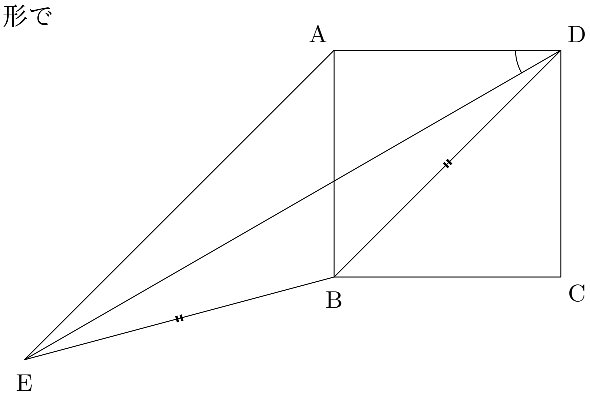
【整角４角形】問題 $\mathbf{15'}$

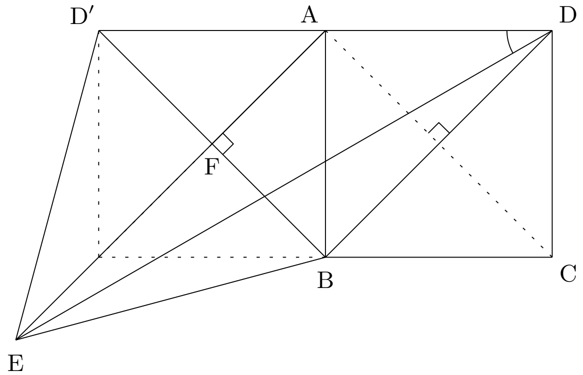
右図のように，四角形 ABCD は正方形で
AE $/\!/$ BD, BD $=$ BE のとき，
$\angle$ADE を求めよ。



〔 図形の演習 (東京出版) p106〕

【解答 1】

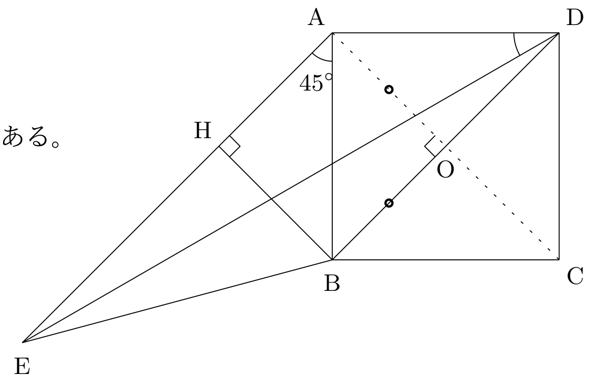
四角形 ABCD は正方形であるから，直線 BD は線分 AC の垂直二等分線である。
点 A に関して点 D と対称な点 D′ を図のようにとる。
線分 BD′ の中点を F とすると，AE $/\!/$ BD より
直線 AFE は線分 BD′ の垂直二等分線である。
よって，$\triangle$EBD′ は
　EB $=$ ED′ の二等辺三角形である。
また，BD′ $=$ BD $=$ BE より
　$\triangle$EBD′ は正三角形である。
よって，$\angle\mathbf{EBH} = \mathbf{60^\circ}$



$\triangle$BDE は二等辺三角形で，
$\angle\mathrm{DBE} = \angle\mathrm{DBH} + \angle\mathrm{EBH} = 150^\circ$ より，
$\angle\mathrm{BDE} = \dfrac{1}{2}(180^\circ - 150^\circ) = 15^\circ$
よって，$\angle\mathbf{ADE} = \angle\mathbf{ADB} - \angle\mathbf{BDE} = \mathbf{30^\circ}$

【解答 2】

対角線 AC と BD の交点を O とすると，
四角形 ABCD は正方形であるから，　　AO $\perp$ OB, OA $=$ OB
点 B から直線 EA に下ろした垂線の足を H とすると，
　AH $\perp$ $/\!/$ OB, BH $/\!/$ OA より，
四角形 OAHB は正方形である。
　$\mathrm{BH} = \mathrm{BO} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BD} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BE}$
より，$\triangle$EBH は BH : BE $= 1 : 2$ の直角三角形である。
よって，$\angle\mathbf{EBH} = \mathbf{60^\circ}$



$\triangle$BDE は二等辺三角形で，
$\angle\mathrm{DBE} = \angle\mathrm{DBH} + \angle\mathrm{EBH} = 150^\circ$ より，
$\angle\mathrm{BDE} = \dfrac{1}{2}(180^\circ - 150^\circ) = 15^\circ$
よって，$\angle\mathbf{ADE} = \angle\mathbf{ADB} - \angle\mathbf{BDE} = \mathbf{30^\circ}$