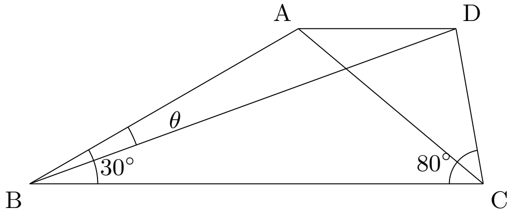
【角度の問題】問題 14

問 AD // BC の台形 ABCD，AD = CD です。
∠ABD を求めよ。

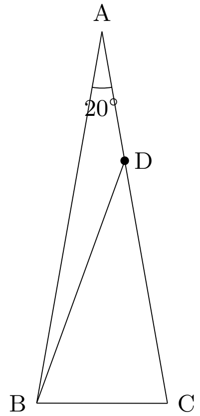


『高校への数学－１９９９年１０月号』（東京出版）より

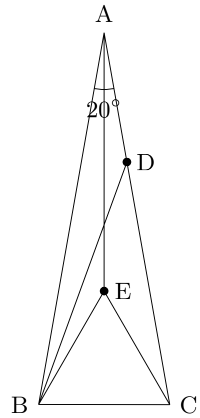
最初に【ラングレーの類題】問題 7 を証明する。

【ラングレーの類題】問題 7

問 △ABC は AB = AC, ∠BAC = 20° の二等辺三角形である。点 D を辺 AC 上で AD = BC を満たす点とするとき，∠ABD の大きさを求めよ。



ラングレーの類題 7 の解答



図のように，BC を一辺とする正三角形をつくり，その頂点を E とする。
△ABD と △BAE は

$\qquad$ AB = BA(共通) ······①

AD = BC, BE = BC から

$\qquad$ AD = BE ······②

$\angle\mathrm{BAD} = 20^\circ$, $\angle\mathrm{ABE} = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$ から

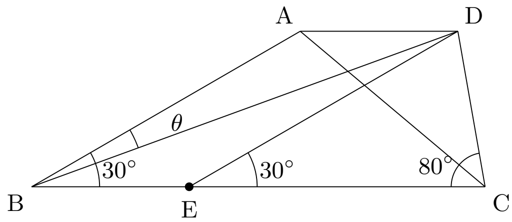
$\qquad$ ∠BAD = ∠ABE ······③

2 辺とその間の角が相等しいので，△ABD ≡ △BAE
直線 AE は線分 BC の垂直二等分線であるから，

$$\angle\mathrm{ABD} = \angle\mathrm{BAE} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{BAC} = 10^\circ$$

$$\boldsymbol{\angle\mathrm{BDC} = 20^\circ + 10^\circ = 30^\circ}$$

問題 14 の解答



線分 BC 上に BE = AD となる点 E をとると，
四角形 ABED は平行四辺形である。

$\qquad$ BE = CD, $\angle\mathrm{CED} = 30^\circ$ であるから，

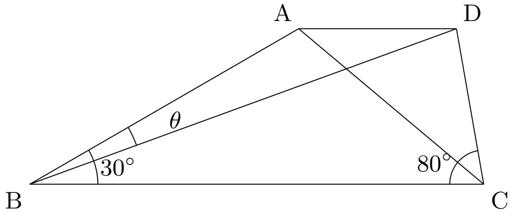
ラングレーの類題 7 の結果から

$$\angle\mathrm{DBC} = 20^\circ$$

$$\boldsymbol{\angle\mathrm{ABD} = 30^\circ - 20^\circ = 10^\circ}$$

【角度の問題】問題 14

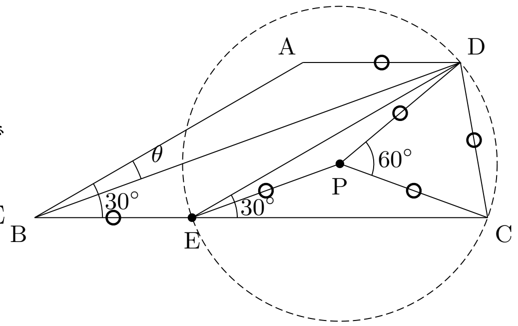
$\boxed{問}$ AD // BC の台形 ABCD，AD = CD です。
$\angle$ABD を求めよ。



『高校への数学ー１９９９年１０月号』（東京出版）より

【求め方２】

線分 BC 上に BE = AD となる点 E をとると，
四角形 ABED は平行四辺形である。
$\triangle$CDE の外接円の中心を P とすると，$\angle \mathrm{CED} = 30°$ であるから，$\angle \mathrm{CPD} = 60°$
ゆえに $\triangle$CPD は正三角形だから PD = PE = CD = BE である。
$\angle \mathrm{PEC} = \angle \mathrm{PCE} = 80° - 60° = 20°$ より
$\angle \mathrm{BEP} = 180° - 20° = 160°$
$\angle \mathrm{EPD} = 2\angle \mathrm{ECD} = 160°$
したがって，四角形 BEPD は等脚台形である。
よって，$\angle \mathrm{DBE} = \angle \mathrm{PEC} = 20°$
以上より $\theta = 30° - 20° = \mathbf{10°}$



【求め方３】

線分 CB 上に CE = CD となる点 E をとると，
四角形 AECD は菱形である。
$\triangle$ABE の外接円の中心を P とすると，$\angle \mathrm{ABE} = 30°$ であるから，$\angle \mathrm{APE} = 60°$
ゆえに $\triangle$APE は正三角形だから AP = AD である。
$\angle \mathrm{PAD} = 60° + 80° = 140°$ より $\angle \mathrm{APD} = 20°$
また，$\angle \mathrm{APB} = 2\angle \mathrm{AEB} = 160°$
$\angle \mathrm{APD} + \angle \mathrm{APB} = 180°$ であるから，点 P は直線 BD 上にある。
以上より $\theta = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{APD} = \mathbf{10°}$