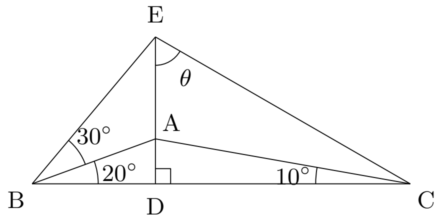
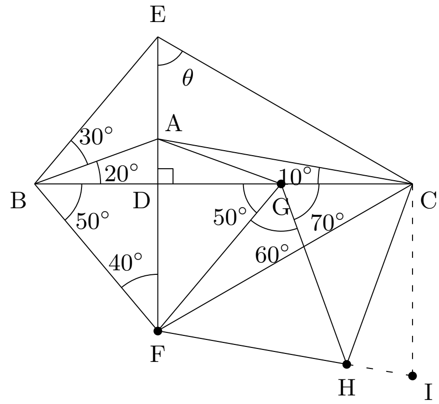
【角度の問題】問題 13

$\boxed{問}$ △ABC の高さ AD の延長上に図のように点 E をとります。
図の θ の角度を求めよ。



【求め方】



線分 BC に関して点 E と対称な点を F とすると
$\angle FBA = \angle FAB = 70°$ より　　$FB = FA$ ······①

線分 AD に関して点 B と対称な点を G とすると
$\angle GAC = 20° - \angle GCA = 10° = \angle GCA$ より
　　$GA = GC$ ······②

図のように △AFG と合同な △GHC を作ると
　　$\angle FGH = 180° - (50° + 70°) = 60°$
$GF = FH$ より △FGH は正三角形である。
よって △HGC は $HG = HC$ の二等辺三角形
　　$\angle FHC = 60° + 40° = 100°$ より $\angle HCF = \dfrac{1}{2}(180° - 100°) = 40°$
よって $\angle FCD = 70° - 40° = 30°$
ゆえに，$\boldsymbol{\theta = 60°}$　$\boxed{終}$

$\boxed{別}$線分 BC に関して点 E と対称な点を F とすると
$\angle FBA = \angle FAB = 70°$ より　　$FB = FA$ ······①

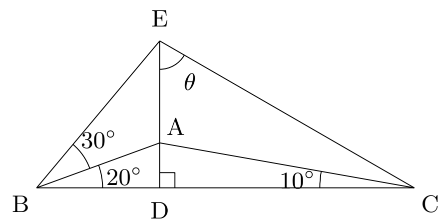
線分 AD に関して点 B と対称な点を G とすると
$\angle GAC = 20° - \angle GCA = 10° = \angle GCA$ より
　　$GA = GC$ ······②

FG を一辺とする正三角形 FGH を図のように作ると，
△HGC と △FBA は
　　$\angle HGC = 180° - (50° + 60°) = 70° = \angle FBA$
　　$HG = FG = FB$,　　$GC = CA = BA$
であるから　　$\triangle HGC \equiv \triangle FBA$
よって △HGC は $HG = HC$ の二等辺三角形
　　$\angle FHC = 60° + 40° = 100°$ より $\angle HCF = \dfrac{1}{2}(180° - 100°) = 40°$
よって $\angle FCD = 70° - 40° = 30°$
ゆえに，$\boldsymbol{\theta = 60°}$　$\boxed{終}$

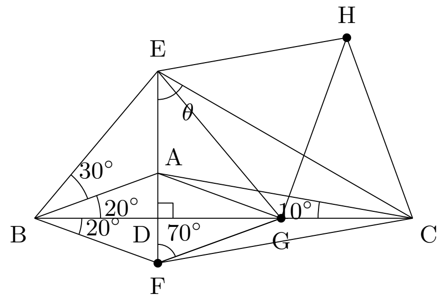
注)　四角形 ACHF は等脚台形であるから，AC $/\!\!/$ FH
平行四辺形 ACIF を作ると，△HCI も二等辺三角形となる。

【角度の問題】問題 13

$\boxed{\text{問}}$ $\triangle$ABC の高さ AD の延長上に図のように点 E をとります。
図の θ の角度を求めよ。



【求め方 3】



線分 BC に関して点 A と対称な点を F，線分 AD に関して点 B と対称な点を G とすると

$\angle \mathrm{EFG} = \angle \mathrm{EGF} = 70^\circ$ より　　EF $=$ EG $\cdots\cdots$①

また，$\angle \mathrm{GAC} = 20^\circ - \angle \mathrm{GCA} = 10^\circ = \angle \mathrm{GCA}$ より

　　FG $=$ GA $=$ GC $\cdots\cdots$②

図のように $\triangle$EFG と合同な $\triangle$HGC を作ると

　　$\angle \mathrm{EGH} = 180^\circ - (50^\circ + 70^\circ) = 60^\circ$

GE $=$ GH より $\triangle$GEH は正三角形である。

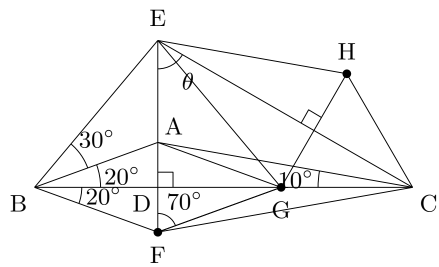
よって $\triangle$HEC は HE $=$ HC の二等辺三角形

　　$\angle \mathrm{EHC} = 60^\circ + 40^\circ = 100^\circ$ より $\angle \mathrm{HCE} = \dfrac{1}{2}(180^\circ - 100^\circ) = 40^\circ$

よって $\angle \mathrm{ECD} = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$

ゆえに，$\boldsymbol{\theta = 60^\circ}$　$\boxed{\text{終}}$

【求め方 4】



線分 BC に関して点 A と対称な点を F，線分 AD に関して点 B と対称な点を G とすると

$\angle \mathrm{EFG} = \angle \mathrm{EGF} = 70^\circ$ より　　EF $=$ EG $\cdots\cdots$①

また，$\angle \mathrm{GAC} = 20^\circ - \angle \mathrm{GCA} = 10^\circ = \angle \mathrm{GCA}$ より

　　FG $=$ GA $=$ GC $\cdots\cdots$②

図のように正三角形 HGC を作ると

　　$\angle \mathrm{EGH} = 180^\circ - (50^\circ + 60^\circ) = 70^\circ$

GH $=$ GC $=$ GF より $\boldsymbol{\triangle \mathrm{EGH} \equiv \triangle \mathrm{EGF}}$

よって $\triangle$EGH は EG $=$ EH の二等辺三角形である。

$\triangle$CHE $\equiv$ $\triangle$CGE であるから

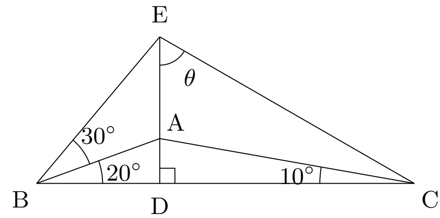
線分 CE は線分 GH の垂直二等分線となる。

よって $\angle \mathrm{ECD} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{GCH} = 30^\circ$

ゆえに，$\boldsymbol{\theta = 60^\circ}$　$\boxed{\text{終}}$

【角度の問題】問題 13

$\boxed{\text{問}}$ △ABC の高さ AD の延長上に図のように点 E をとります。
図の θ の角度を求めよ。



【求め方】村松芳子さん（静岡県・一般）の解答（一部変更）
図のように，△ABC の外心を O とすると

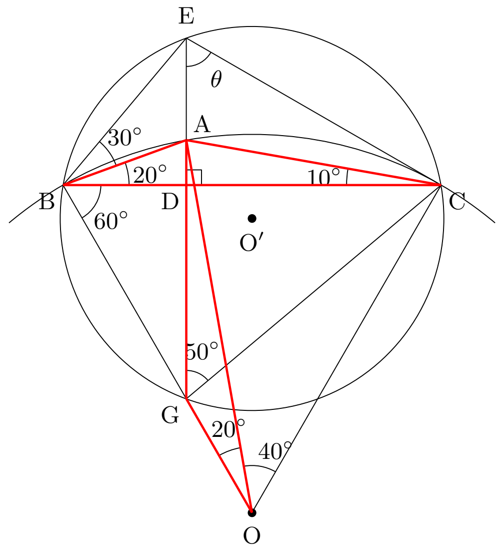
$\mathrm{BO} = \mathrm{AO} = \mathrm{CO}$

円周角と中心角の関係より

$$\angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{AOB} + \angle\mathrm{AOC}$$
$$= 2(\angle\mathrm{ACB} + \angle\mathrm{ABC}) = 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ$$

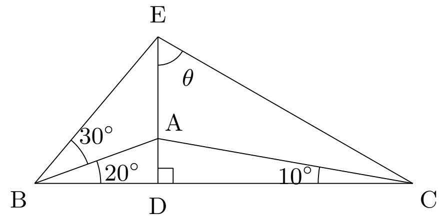
ゆえに △BCO は正三角形である。
$\angle\mathrm{ACO} = \angle\mathrm{CAO} = \dfrac{1}{2}(180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ$
次に，ED を延長し BO との交点を G とする。
△GOA と △ABC において，
$\mathrm{OA} = \mathrm{BC}$，$\angle\mathrm{GOA} = \angle\mathrm{ABC} = 20^\circ$
$\angle\mathrm{GAO} = 80^\circ - 70^\circ = 10^\circ = \angle\mathrm{ACB}$
ゆえに，$\triangle\mathrm{GOA} \equiv \triangle\mathrm{ABC}$ よって $\mathrm{AG} = \mathrm{AC}$
したがって，△AGC は頂角 80° の二等辺三角形である。
ゆえに，$\angle\mathrm{ACG} = \angle\mathrm{AGC} = 50^\circ$
$\angle\mathrm{EBC} = \angle\mathrm{EGC} = 50^\circ$ だから，
4 点 E, B, G, C は同一円周上にある。
ゆえに，$\overset{\frown}{\mathrm{GC}}$ の円周角が等しいから

$\boldsymbol{\angle\mathrm{CEA} = \angle\mathrm{CBG} = 60^\circ}$ である。

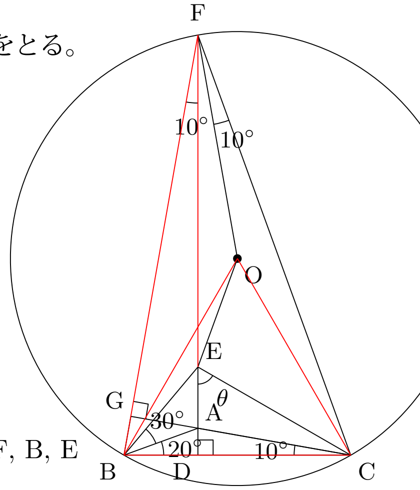


【角度の問題】問題 13

問 △ABC の高さ AD の延長上に図のように点 E をとります。
図の θ の角度を求めよ。



【求め方】榎本孝一さん（東京都・一般）の解答



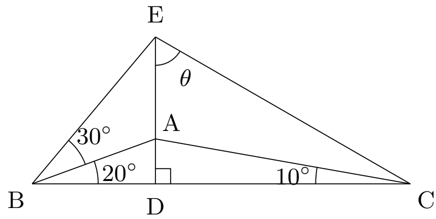
図のように，DE を E の方に延長し，$\angle\mathrm{DFB}=10^\circ$ となるような点 F をとる。
ここで，CA を A の方に延長し，BF との交点を G とする。
$\angle\mathrm{FGC}=90^\circ$ で，$\angle\mathrm{FDC}=90^\circ$ とから，4 点 F, G, D, C は，
同一円周上にあり，4 点 A, G, B, D も同一円周上にある。
ここで，$\angle\mathrm{ABD}=20^\circ$ より，$\angle\mathrm{AGD}=\angle\mathrm{CGD}=\angle\mathrm{CFD}=20^\circ$

次に，△FBC の外心を O とすると，
$\angle\mathrm{FOC}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{FBC}=160^\circ$，$\angle\mathrm{OFC}=\angle\mathrm{OCF}=10^\circ$ より，
$\angle\mathrm{OFE}=\angle\mathrm{CFD}-\angle\mathrm{CFO}=20^\circ-10^\circ=10^\circ$ となる。
また，$\angle\mathrm{BFC}=10^\circ+20^\circ=30^\circ$ より，△OBC は正三角形となるので，
$\angle\mathrm{OBE}=\angle\mathrm{OBC}-\angle\mathrm{EBC}=60^\circ-50^\circ=10^\circ$ で，これより，4 点 O, F, B, E は同一円周上にある。ゆえに $\angle\mathrm{BFE}=\angle\mathrm{BOE}=10^\circ$
△EBO は，$\angle\mathrm{OBE}=\angle\mathrm{BOE}=10^\circ$ より，EB = EO
よって，$\triangle\mathrm{BCE}\equiv\triangle\mathrm{OCE}$ で，$\angle\mathrm{BEO}=180^\circ-20^\circ=160^\circ$
$\angle\mathrm{BEC}=\angle\mathrm{OEC}=100^\circ$ より，$\angle\mathrm{CED}=100^\circ-40^\circ=60^\circ$

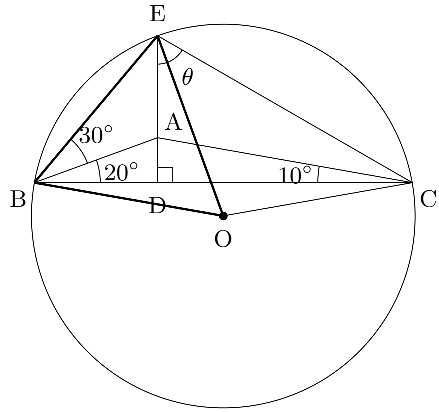
【求め方】榎本孝一さん（東京都・一般）の解答
図のように，DE を E の方に延長し，$\angle\mathrm{DFB}=10^\circ$ となるような点 F をとる。
ここで，CA を A の方に延長し，BF との交点を G，BA を A の方に延長し，CF との交点を H とする。
$\mathrm{FD}\perp\mathrm{BC}$, $\mathrm{CG}\perp\mathrm{FB}$ より，点 A は △FBC の垂心。
よって，$\angle\mathrm{FHB}=\angle\mathrm{FDB}=90^\circ$ となり，4 点 F, B, D, H は同一円周上にある。
ここで，$\angle\mathrm{HBD}=\angle\mathrm{HFD}=20^\circ$
次に，△FBC の外心を O とすると，$\angle\mathrm{FOC}=160^\circ$，$\angle\mathrm{OFC}=\angle\mathrm{OCF}=10^\circ$ より，
$\angle\mathrm{OFE}=20^\circ-10^\circ=10^\circ$ となる。
また，$\angle\mathrm{BFC}=10^\circ+20^\circ=30^\circ$ より，△OBC は正三角形となるので，
$\angle\mathrm{OBE}=\angle\mathrm{OBC}-\angle\mathrm{EBC}=60^\circ-50^\circ=10^\circ$ で，これより，4 点 O, F, B, E は同一円周上にある。
$\angle\mathrm{BFE}=\angle\mathrm{BOE}=10^\circ$
△EBO は，$\angle\mathrm{OBE}=\angle\mathrm{BOE}=10^\circ$ より，EB = EO
よって，$\triangle\mathrm{BCE}\equiv\triangle\mathrm{OCE}$ で，$\angle\mathrm{BEO}=180^\circ-20^\circ=160^\circ$
$\angle\mathrm{BEC}=\angle\mathrm{OEC}=100^\circ$ より，$\angle\mathrm{CED}=100^\circ-40^\circ=60^\circ$

問題 13

$\boxed{問}$ △ABC の高さ AD の延長上に図のように点 E をとります。
図の θ の角度を求めよ。



【求め方】



BE を一辺とする正三角形 OBE をつくると，

「点 O が △BCE の外心である。$\cdots\cdots$ ♯」

♯ が示せれば $\angle\mathrm{BCE} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{BOE} = 30^\circ$ です。

つまり，OB=OC か $\angle\mathrm{OCB} = 10^\circ$ のどちらかが示せればよいのですが $\cdots$

いろいろやってみましたが，無理があるかも知れません。

そこで以下の方法で求めます。

$\angle\mathrm{BCE} = \alpha$ とする。

$\mathrm{AD} = \mathrm{BD}\tan 20^\circ = \mathrm{CD}\tan 10^\circ \ \cdots$ ①

$\mathrm{ED} = \mathrm{BD}\tan 50^\circ = \mathrm{CD}\tan\alpha \ \cdots$ ②

①，② より　$\tan\alpha = \dfrac{\tan 50^\circ \times \tan 10^\circ}{\tan 20^\circ}$

ここで，$\tan 10^\circ = x$ とおくと，加法定理により

$$\tan 20^\circ = \tan(30^\circ - 10^\circ) = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{3}} - x}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \times x} = \frac{1-\sqrt{3}x}{\sqrt{3}+x}$$

同様に，$\tan 50^\circ = \tan(60^\circ - 10^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}-x}{1+\sqrt{3}x}$

$$よって，\tan\alpha = \frac{\dfrac{\sqrt{3}-x}{1+\sqrt{3}x} \times x}{\dfrac{1-\sqrt{3}x}{\sqrt{3}+x}} = \frac{x(3-x^2)}{1-3x^2} \ \cdots ③$$

また，$\tan 3\theta = \tan(2\theta+\theta) = \cdots = \dfrac{\tan\theta(3-\tan^2\theta)}{1-3\tan^2\theta}$ であるから，

$$\tan 30^\circ = \tan(3\times 10^\circ) = \frac{\tan 10^\circ(3-\tan^2 10^\circ)}{1-3\tan^2 10^\circ} = \frac{x(3-x^2)}{1-3x^2} \ \cdots ④$$

③，④ から $\tan\alpha = \tan 30^\circ$

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ であるから，$\alpha = 30^\circ$ ゆえに，$\angle\mathrm{CED} = 60^\circ$ $\boxed{終}$

【注意】上の解答では，③ から x の 3 次方程式を解いて $\tan 10^\circ$ を求める必要がありません。

問題 13 の解答

3 倍角の公式

$$\boldsymbol{\tan 3\theta = \frac{\tan\theta(3-\tan^2\theta)}{1-3\tan^2\theta}}$$

【証明】
$$\tan 3\theta = \tan(2\theta+\theta) = \frac{\tan 2\theta + \tan\theta}{1-\tan 2\theta\tan\theta} = \frac{\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}+\tan\theta}{1-\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\tan\theta}$$
$$= \frac{2\tan\theta + \tan\theta(1-\tan^2\theta)}{(1-\tan^2\theta)-2\tan^2\theta} = \frac{\tan\theta(3-\tan^2\theta)}{1-3\tan^2\theta} \qquad \boxed{終}$$

公　式

$$\boldsymbol{\tan 3\theta = \tan(60^\circ+\theta)\tan(60^\circ-\theta)\tan\theta\ ,\ \tan\theta = \tan(30^\circ+\theta)\tan(30^\circ-\theta)\tan 3\theta}$$
$$\boldsymbol{\tan 10^\circ\tan 50^\circ = \tan 20^\circ\tan 30^\circ}$$

【証明】
$$\tan 3\theta = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2-\tan^2\theta}{1-\left(\sqrt{3}\tan\theta\right)^2}\cdot\tan\theta = \frac{(\sqrt{3}+\tan\theta)(\sqrt{3}-\tan\theta)}{(1+\sqrt{3}\tan\theta)(1-\sqrt{3}\tan\theta)}\cdot\tan\theta$$
$$= \frac{\sqrt{3}+\tan\theta}{1-\sqrt{3}\tan\theta}\cdot\frac{\sqrt{3}-\tan\theta}{1+\sqrt{3}\tan\theta}\cdot\tan\theta$$

$\therefore$ $\boldsymbol{\tan 3\theta = \tan(60^\circ+\theta)\tan(60^\circ-\theta)\tan\theta}$ ……①

また,

$$\tan(60^\circ+\theta) = \frac{1}{\tan\{90^\circ-(60^\circ+\theta)\}} = \frac{1}{\tan(30^\circ-\theta)}$$
$$\tan(60^\circ-\theta) = \frac{1}{\tan\{90^\circ-(60^\circ-\theta)\}} = \frac{1}{\tan(30^\circ+\theta)} \text{ より}$$

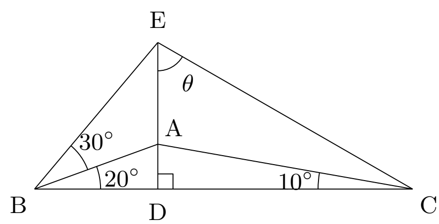
$\therefore$ $\boldsymbol{\tan\theta = \tan(30^\circ-\theta)\tan(30^\circ+\theta)\tan 3\theta}$ ……②

① において $\theta = 10^\circ$ とすると

$$\tan 30^\circ = \tan 70^\circ\tan 50^\circ\tan 10^\circ,\ \tan 70^\circ = \frac{1}{\tan 20^\circ}\text{より}$$

$\boldsymbol{\tan 10^\circ\tan 50^\circ = \tan 20^\circ\tan 30^\circ}$ が成り立つ。 $\boxed{終}$

$\boxed{問}$ △ABC の高さ AD の延長上に図のように点 E をとります。
図の θ の角度を求めよ。



【求め方】$\angle\mathrm{BCE} = \alpha$ とする。

$$\mathrm{AD} = \mathrm{BD}\tan 20^\circ = \mathrm{CD}\tan 10^\circ \quad \cdots③$$
$$\mathrm{ED} = \mathrm{BD}\tan 50^\circ = \mathrm{CD}\tan\alpha \quad \cdots④$$

③, ④より

$$\tan\alpha\tan 20^\circ = \tan 50^\circ\times\tan 10^\circ$$
$$\therefore\ \boldsymbol{\alpha = 30^\circ,\ \theta = 90^\circ-\alpha = 60^\circ}$$

公　式

$$\boldsymbol{\tan 3\theta = \tan\theta\tan(60^\circ+\theta)\tan(60^\circ-\theta)}$$
$$\boldsymbol{\sin 3\theta = 4\sin\theta\sin(60^\circ+\theta)\sin(60^\circ-\theta)}$$
$$\boldsymbol{\cos 3\theta = 4\cos\theta\cos(60^\circ+\theta)\cos(60^\circ-\theta)}$$

【証明】

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \\ &= 4\sin\theta\left(\frac{3}{4}-\sin^2\theta\right)\ \cdots\cdots①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(60^\circ+\theta)\sin(60^\circ-\theta) &= -\frac{1}{2}(\cos 120^\circ - \cos 2\theta) \\ &= -\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{2}-(1-2\sin^2\theta)\right\} \\ &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}+2\sin^2\theta\right) \\ &= \frac{3}{4}-\sin^2\theta\ \cdots\cdots②\end{aligned}$$

①，②より

$$\sin 3\theta = 4\sin\theta\sin(60^\circ+\theta)\sin(60^\circ-\theta)$$

$$\cos 3\theta = \frac{\sin 3\theta}{\tan 3\theta}$$

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \frac{4\sin\theta\sin(60^\circ+\theta)\sin(60^\circ-\theta)}{\tan\theta\tan(60^\circ+\theta)\tan(60^\circ-\theta)} \\ &= 4\frac{\sin\theta}{\tan\theta}\frac{\sin(60^\circ+\theta)}{\tan(60^\circ+\theta)}\frac{\sin(60^\circ-\theta)}{\tan(60^\circ-\theta)} \\ &= 4\cos\theta\cos(60^\circ+\theta)\cos(60^\circ-\theta)\end{aligned}$$