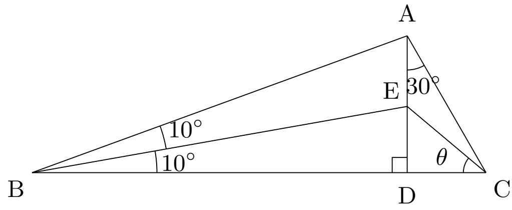
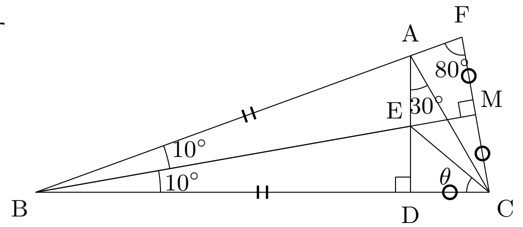
【角度の問題】問題 13 − 3

問 図の θ の角度を求めよ。



【解答】

線分 BA の延長線上に $\mathrm{BF}=\mathrm{BC}$ となる点を F とすると，



$\angle\mathrm{AFC}=\angle\mathrm{BFC}=\dfrac{1}{2}(180^\circ-20^\circ)=80^\circ$

$\angle\mathrm{FAC}=20^\circ+60^\circ=80^\circ=\angle\mathrm{AFC}$ より

$\triangle\mathrm{CAF}$ は $\mathrm{CA}=\mathrm{CF}$ の二等辺三角形である。

直線 BE は $\angle\mathrm{CBF}$ の二等分線であるから，

線分 CF の中点 M を通る。

$\mathrm{CA}=\mathrm{CF}=2a$ とすると，

$\mathrm{CD}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}=a,\ \mathrm{CM}=\dfrac{1}{2}\mathrm{CF}=a$

$\triangle\mathrm{CED}$ と $\triangle\mathrm{CEM}$ は，斜辺と他の一辺が等しい直角三角形であるから合同である。

$\theta=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{BCF}=\dfrac{1}{2}\cdot80^\circ=\mathbf{40^\circ}$

別解

正接の 3 倍角の公式

$$\tan3\theta=\tan(60^\circ+\theta)\cdot\tan(60^\circ-\theta)\cdot\tan\theta$$

において，$\theta=20^\circ$ とすると，

$\tan60^\circ=\tan80^\circ\cdot\tan40^\circ\cdot\tan20^\circ$

$$\mathbf{\tan10^\circ\cdot\tan60^\circ=\tan20^\circ\cdot\tan40^\circ}$$

が成り立つ。

図において $\tan10^\circ\tan60^\circ=\tan20^\circ\tan\theta$ より $\theta=\mathbf{40^\circ}$