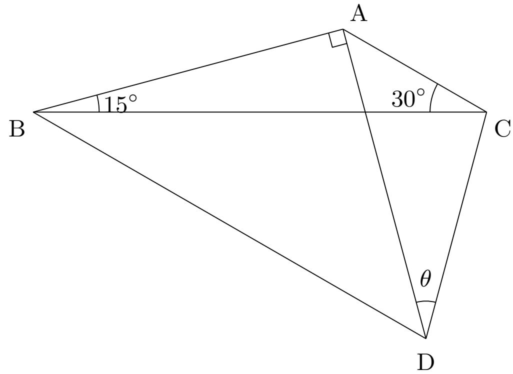
【角度の問題】問題 8

$\boxed{\text{問}}$ △ABD は AB = AD の直角二等辺三角形です。
図の ∠ADC の角度を求めよ。

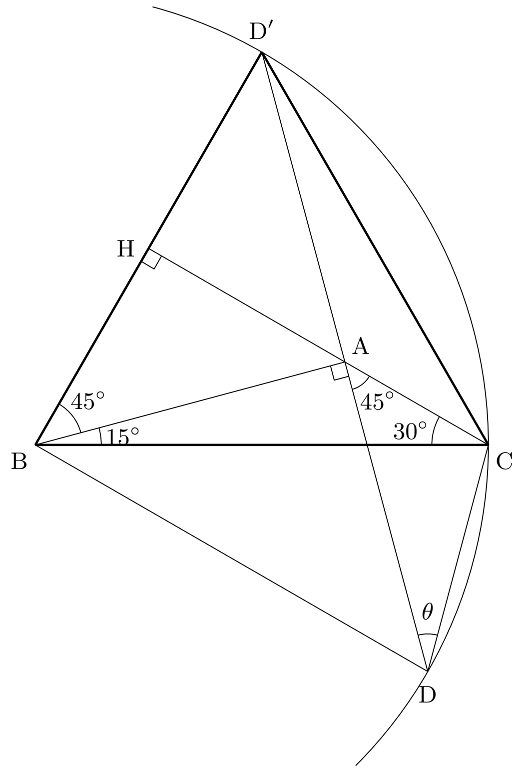


【求め方 1】
$\angle\mathrm{BAC} = 180^\circ - (15^\circ + 30^\circ) = 135^\circ$
$\angle\mathrm{CAD} = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$
△ABD と合同な三角形 ABD′ を図のように作ると
直線 CA は線分 BD′ の垂直二等分線である。
ゆえに $\mathrm{CB} = \mathrm{CD'}$
$\angle\mathrm{CBD'} = 60^\circ$ より △CBD′ は正三角形である。

$$\mathrm{BD} = \mathrm{BC} = \mathrm{BD'}$$

よって，3 点 D, C, D′ は点 B を中心とする円上にある。
$\overset{\frown}{\mathrm{CD'}}$ の円周角と中心角の関係より

$$\boldsymbol{\angle\mathrm{ADC} = \angle\mathrm{D'DC} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{D'BC} = 30^\circ}$$



【求め方 2】
△ABC の外心を O とすると
$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ 円周角と中心角の関係より
$\angle\mathrm{AOB} = 2\angle\mathrm{ACB} = 60^\circ$ であるから
△OAB は正三角形である。
ゆえに，　$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \mathrm{AB} = \mathrm{AD}$ ……①
$\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ の円周角と中心角の関係より
$\angle\mathrm{AOC} = 2\angle\mathrm{ABC} = 30^\circ$
$\angle\mathrm{OAD} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ = \angle\mathrm{AOC}$ ……②
①, ② より　　$\triangle\mathrm{AOC} \equiv \triangle\mathrm{CAD}$
よって 四角形 AODC は
$\mathrm{AC} = \mathrm{OD}$, $\mathrm{AO} /\!/ \mathrm{CD}$ の等脚台形である。

$$\boldsymbol{\angle\mathrm{ADB} = \angle\mathrm{OAD} = 30^\circ}$$