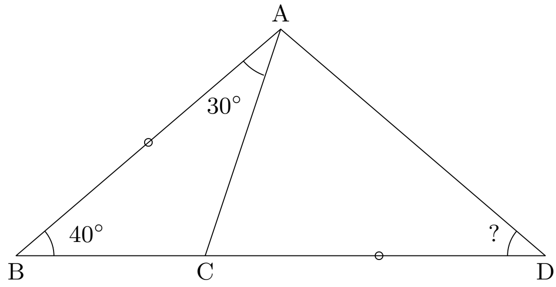
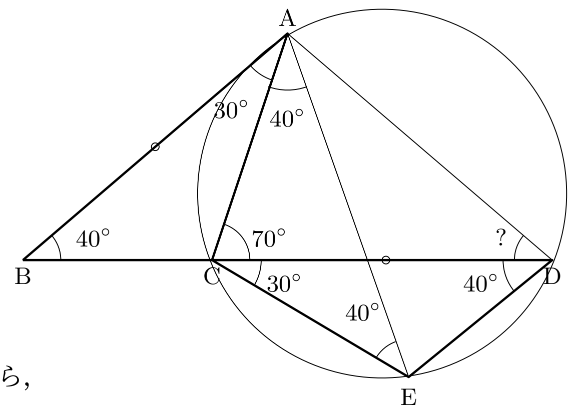
【角度の問題】問題 4

問 図のように三角形 ABD があり，AB と CD の長さが等しいとき，？ で示した角度を求めなさい。また，どのような図を使って答えを出しましたか。考えるときに使った図を書いて，必要な記号や角度を書き入れなさい。
1993 年算数オリンピック・決勝・問題 4 より



【解答】

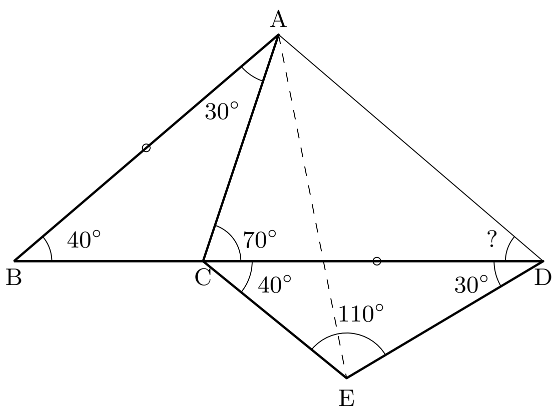


AB = CD であるから，三角形 ABC と合同な三角形 CDE を図のように作ると，
三角形 CAE は CA = CE の二等辺三角形である。

$$\angle \mathrm{CAE} = \angle \mathrm{CEA} = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle \mathrm{ACE})$$
$$= \frac{1}{2}\{180^\circ - (70^\circ + 30^\circ)\} = 40^\circ$$

$\angle \mathrm{CAE} = \angle \mathrm{CDE} = 40^\circ$ であるから，円周角の定理の逆より四角形 ACED は円に内接する。
円周角の定理より，$\overset{\frown}{\mathrm{CA}}$ に対する円周角は等しいから，

$$\angle \mathrm{CDA} = \angle \mathrm{CEA} = \mathbf{40^\circ}$$



別 AB = CD であるから，三角形 ABC と合同な三角形 DCE を図のように作ると，
$\angle \mathrm{ACE} = \angle \mathrm{ACD} + \angle \mathrm{DCE} = (40^\circ + 30^\circ) + 40^\circ = 110^\circ$
$\angle \mathrm{DEC} = 180^\circ - (40^\circ + 30^\circ) = 110^\circ$
よって，$\angle \mathrm{ACE} = \angle \mathrm{DEC}$，AC = DE が成り立つから，四角形 ACED は AD // CE の等脚台形である。
(三角形 ACE と三角形 DEC は 2 辺とその間の角が，それぞれ等しいので合同である。)
錯角が等しいので，$\angle \mathrm{CDA} = \angle \mathrm{DCE} = \mathbf{40^\circ}$

原図 $\angle \mathrm{A} = 100^\circ$ の二等三角形 ABC がある。

辺 BC 上に CP = CA となる点 P をとると，

$$\mathrm{AB} = \mathrm{PC},\ \angle \mathrm{BAP} = 100^\circ - 70^\circ = 30^\circ$$

となり条件を満たす図形ができる。