

「1」を単位分数の和に直してみよう

「1」を分子が1の分数(単位分数という)に分ける方法(分母は99までとする)

完全数を用いる。

自然数 m に対して、 $S(m)$ は m 自身を除いた m の約数の総和を表すものとしたとき、 $S(m)$ が m より大であるか、等しいか、または小であるかに応じて、 m をそれぞれ豊数(過剰数)(abundant number)、完全数(perfect number)、または輪数(不足数)(deficient number)という。

例えば6と28は完全数であるから

$$6 = 3 + 2 + 1 \text{ であるから両辺を } 6 \text{ で割れば } 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$28 = 14 + 7 + 4 + 2 + 1 \text{ であるから両辺を } 28 \text{ で割れば } 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} \cdots \textcircled{1}$$

分数式の変形を用いて作れる。

例えば $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ だから $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$ を用いる。

$$n = 2 \text{ を代入すると } \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdots \textcircled{2} \quad n = 3 \text{ を代入すると } \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \cdots \textcircled{3}$$

$$n = 4 \text{ を代入すると } \frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} \cdots \textcircled{4}$$

$\frac{1}{n(3n+2)} = \frac{1}{3n(3n+1)} + \frac{1}{3n(3n+2)} + \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$ を用いる。

$$n = 1 \text{ を代入すると } \frac{1}{5} = \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} \text{ と } \frac{1}{10} = \frac{1}{24} + \frac{1}{30} + \frac{1}{40} \text{ と } \frac{1}{15} = \frac{1}{36} + \frac{1}{45} + \frac{1}{60}$$

$$n = 2 \text{ を代入すると } \frac{1}{16} = \frac{1}{42} + \frac{1}{48} + \frac{1}{56} \text{ と } \frac{1}{8} = \frac{1}{21} + \frac{1}{24} + \frac{1}{28} \text{ と } \frac{1}{24} = \frac{1}{63} + \frac{1}{72} + \frac{1}{84}$$

その他の方法

$$4, 3 \text{ は } 12 \text{ の約数だから } \frac{1}{12} = \frac{4+3}{12 \cdot (4+3)} = \frac{4}{12 \cdot 7} + \frac{3}{12 \cdot 7} = \frac{1}{21} + \frac{1}{28}$$

$$9, 2 \text{ は } 18 \text{ の約数だから } \frac{1}{18} = \frac{9+2}{18 \cdot (9+2)} = \frac{9}{18 \cdot 11} + \frac{2}{18 \cdot 11} = \frac{1}{22} + \frac{1}{99}$$

$$10, 5, 2 \text{ は } 10 \text{ の約数だから } \frac{1}{10} = \frac{10+5+2}{10 \cdot (10+5+2)} = \frac{10}{10 \cdot 17} + \frac{5}{10 \cdot 17} + \frac{2}{10 \cdot 17} = \frac{1}{17} + \frac{1}{34} + \frac{1}{85}$$

$$10, 5, 4 \text{ は } 20 \text{ の約数だから } \frac{1}{20} = \frac{10+5+4}{20 \cdot (10+5+4)} = \frac{10}{20 \cdot 19} + \frac{5}{20 \cdot 19} + \frac{4}{20 \cdot 19} = \frac{1}{38} + \frac{1}{76} + \frac{1}{95}$$

えんぴつで、①より2, 4, 7, 14, 28に○をつける。

②より2の○を消す。その代わりに3と6に○をつける。

④, ③の順に使うとどうなりますか? さあ、○を沢山つけてみよう。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99