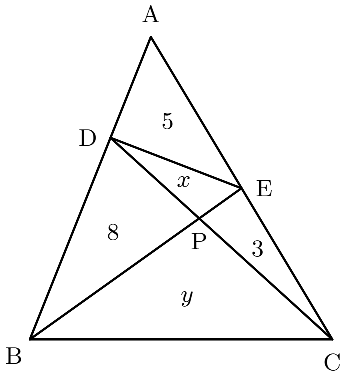
1994年 第4回・日本数学オリンピック予選　主催 (財) 数学オリンピック財団

$\boxed{5}$ $\triangle$ABC の辺 AB, AC 上の点を D, E とし，BE, CD の交点を P とする。$\triangle$ADE, $\triangle$BPD, $\triangle$CEP の面積がそれぞれ 5, 8, 3 のとき，$\triangle$ABC の面積を求めよ。

【解答】



$\triangle\mathrm{DPE}=x,\ \triangle\mathrm{BPC}=y$ とおくと

$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=\triangle\mathrm{ADE}:\triangle\mathrm{DBE}=\triangle\mathrm{ADC}:\triangle\mathrm{DBC}$

よって，$5:(x+8)=(x+5+3):(y+8)$

$\therefore (x+8)^2=5(y+8)$.　　$\boldsymbol{x^2+16x+24=5y}\cdots\cdots①$

$\mathrm{BP}:\mathrm{PE}=\triangle\mathrm{BPD}:\triangle\mathrm{PED}=\triangle\mathrm{BPC}:\triangle\mathrm{PEC}$

よって，$8:x=y:3$.　　$\boldsymbol{xy=24}\cdots\cdots②$

① の両辺に x を掛けて

$x^3+16x^2+24x=5xy$.　　$x^3+16x^2+24x=5\cdot 24$

よって $\boldsymbol{x^3+16x^2+24x-120=0}$.　　$(x-2)(x^2+18x+60)=0$

2	1	16	24	-120
		2	36	120
	1	18	60	0

$x=2,\ -9\pm\sqrt{21}$

$x>0$ より　$\boldsymbol{x=2}$　　② より $\boldsymbol{y=12}$

したがって，$\triangle\mathrm{ABC}=x+y+16=\mathbf{30}$

【別解】$\triangle$ABE と直線 CPD でメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CE}}\cdot\frac{\mathrm{EP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DA}}=1$$

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CE}}=\frac{\triangle\mathrm{ACD}}{\triangle\mathrm{ECD}}=\frac{x+8}{x+3}\ ,\qquad \frac{\mathrm{EP}}{\mathrm{PB}}=\frac{\triangle\mathrm{EPD}}{\triangle\mathrm{PBD}}=\frac{x}{8}\ ,\qquad \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DA}}=\frac{\triangle\mathrm{BDE}}{\triangle\mathrm{DAE}}=\frac{x+8}{5}$$ より

$\dfrac{x+8}{x+3}\times\dfrac{x}{8}\times\dfrac{x+8}{5}=1$ よって $x(x+8)^2=40(x+3)$. $\boldsymbol{x^3+16x^2+24x-120=0}$ 以下同じ。

【補足】$\triangle$ABE と直線 CPD，$\triangle$ACD と直線 BPE でそれぞれメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CE}}\cdot\frac{\mathrm{EP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DA}}=1\ ,\qquad \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}}\cdot\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$$

辺々を掛けて

$$\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AE}}\times\frac{\mathrm{DP}\cdot\mathrm{EP}}{\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP}}=1\quad\therefore\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AE}}=\frac{\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP}}{\mathrm{DP}\cdot\mathrm{EP}}$$ よって $\boldsymbol{\dfrac{\triangle\mathrm{ABC}}{\triangle\mathrm{ADE}}=\dfrac{\triangle\mathrm{BPC}}{\triangle\mathrm{DPE}}}$ が成り立つ。

$\triangle\mathrm{ABC}=S$ と置くと

$$S=x+y+16\cdots①,\qquad \frac{S}{5}=\frac{y}{x}\cdots②,\qquad xy=24\cdots③$$

$\dfrac{y}{x}=\dfrac{xy}{x^2}=\dfrac{y^2}{xy}$ であるから ②, ③ より $x^2=\dfrac{120}{S},\ y^2=\dfrac{24S}{5}$

① より $(S-16)^2=(x+y)^2$. $S^2-32S+256=x^2+2xy+y^2=\dfrac{120}{S}+48+\dfrac{24S}{5}$

整理して $\boldsymbol{5S^3-184S^2+1040S-600=0}$. $(S-30)(5S^2-34S+20)=0$

$S=30,\ \dfrac{17\pm3\sqrt{21}}{5}$　　$S>16$ より $\boldsymbol{S=30}$