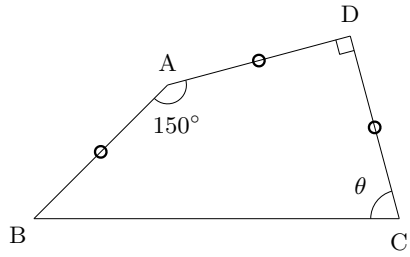
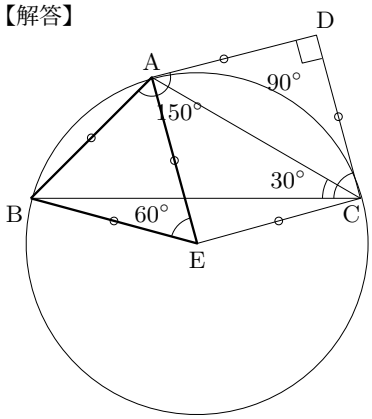
【四角形の角 1】

問 四角形 ABCD で ∠BCD を求めよ。
1994 年算数オリンピック・予選・問題 8 より



【解答】



AB を 1 辺とする正三角形 ABE を図のように作ると,

$\angle EAD = \angle BAD - \angle BAE = 150° - 60° = 90°$

また，AB = AD = AE であるから，四角形 AECD は正方形である。
よって，EB = EA = EC が成り立つから，点 E は △ABC の外心である。
中心角と円周角の関係より

$\angle BCA = \frac{1}{2}\angle BEA = \frac{1}{2} \times 60° = 30°$

$\angle BCD = \angle BCA + \angle DCA = 30° + 45° = \mathbf{75°}$

別 1 正方形 ADCE を図のように作ると,

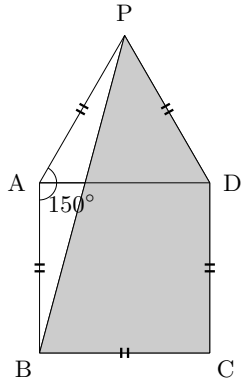
$\angle EAD = \angle BAD - \angle EAD = 150° - 90° = 60°$

また，AB = AE であるから，三角形 ABE は正三角形 である。
よって，EB = EA = EC が成り立つから，点 E は △ABC の外心である。
別 2 正方形 ADCE を図のように作ると，△BEC は二等辺三角形である。

$\angle BEC = 60° + 90° = 150°$ より $\angle BCE = \frac{1}{2}(180° - 150°) = 15°$ $\therefore \angle BCD = 90° - 15° = 75°$

原図 正方形 ABCD と正三角形 ADP を組み合わせると

四角形 PDCB が条件を満たす。



【四角形の角 2】

問 次の角 α, β をそれぞれ求めよ。
算数オリンピック より

図 1

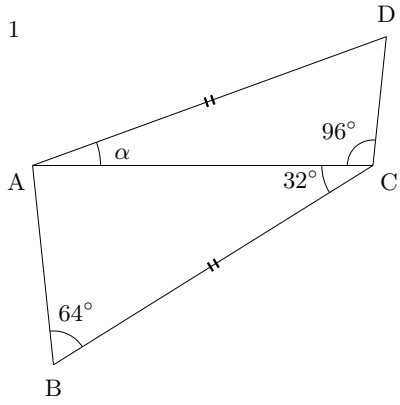
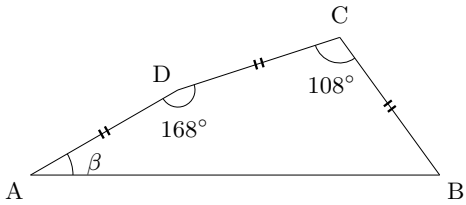


図 2



【解答】

図 1 において，AD = BC であるから 三角形 ABC と合同な三角形 PAD を作る。

$\angle APD = \angle BAC = 180° - (64° + 32°) = 84°$

よって，$\angle APD + \angle ACD = 84° + 96° = 180°$
が成り立つから四角形 ACDP は円に内接する。

AC = PD より $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{PD}$

よって，$\angle ADC = \angle PAD = 64°$

$\therefore \alpha = 180° - (96° + 64°) = 20°$ 答

図 1

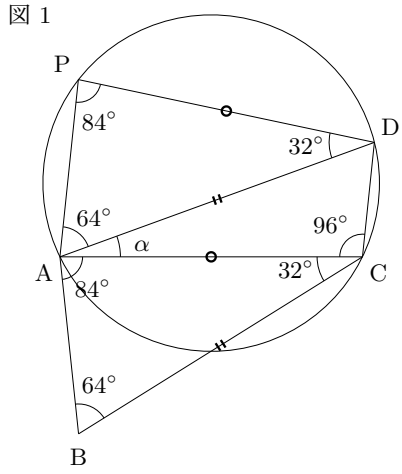
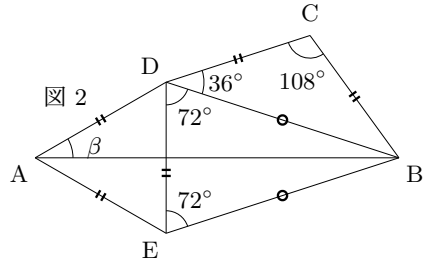


図 2 において，AD を 1 辺とする正三角形 ADE を図のように作る。
$\angle EDC = \angle ADC - \angle ADE = 168° - 60° = 108°$ より $\angle EDC = \angle BCD$
また ED = AD = DC = CB であるから，
四角形 EDCB は DC // EB の**等脚台形**である。
よって，$\angle DEB = 180° - \angle EDC = 180° - 108° = 72°$ ……①
また，$\angle CDB = \frac{1}{2}(180° - \angle DCB) = \frac{1}{2}(180° - 108°) = 36°$ より

$\angle EDB = \angle EDC - \angle CDB = 108° - 36° = 72°$ ……②

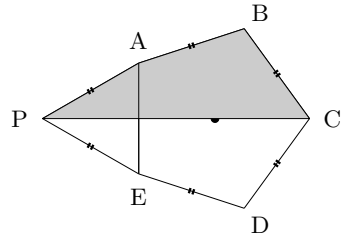
①, ② より △BDE は DB = EB の二等辺三角形である。
AB が共通であるから △ADB ≡ △AEB
よって，$\beta = \frac{1}{2}\angle DAE = \frac{1}{2} \times 60° = 30°$ 答

図 2



別 AD = AE, BD = BE より，四角形 ADBE の対角線 AB と DE は直交する。

よって，$\beta = 90° - 60° = 30°$

原図 正五角形 ABCDE と正三角形 APE を組み合わせると

四角形 ABCP が条件を満たす。