無理関数の積分

$\boxed{1}$ 次の不定積分を求めよ。ただし，$a>0$ とする。

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$

【解答】$\boxed{解答}$ 1　　$\sqrt{x^2+a^2} > \sqrt{x^2} = |x| \geqq -x$ より $x+\sqrt{x^2+a^2}>0$

$$\left\{\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right\}' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}} \cdot \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

したがって，$\displaystyle\int \boldsymbol{\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C}$

$\boxed{解答}$ 2　$x=a\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$dx = \dfrac{a}{\cos^2\theta}\,d\theta,\ \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\tan^2\theta+1)} = \dfrac{a}{\cos\theta}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{\cos\theta}{a}\cdot\frac{a}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int\frac{d\theta}{\cos\theta} = \int\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}\,d\theta$$

$\sin\theta = t$ とおくと

$$\int\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}\,d\theta = \int\frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt$$
$$= \frac{1}{2}\left(\log|1+t|-\log|1-t|\right)+C_1 = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C_1$$

$$\frac{1+t}{1-t} = \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = \left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right)^2$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| = \log\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right| = \log\left|\sqrt{x^2+a^2}+x\right|-\log a$$

したがって，$\displaystyle\int \boldsymbol{\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C}$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

【解答】$\boxed{解答}$ 1 (1) と同様にして

$\left(\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ より $\displaystyle\int \boldsymbol{\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C}$

$\boxed{解答}$ 2　$x=\dfrac{a}{\cos\theta}$ とおくと $dx=\dfrac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta,\ \sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\left(\dfrac{1}{\cos^2\theta}-1\right)} = a\tan\theta$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int\frac{1}{a\tan\theta}\cdot\frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int\frac{d\theta}{\cos\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C_1$$

したがって，$\displaystyle\int \boldsymbol{\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C}$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

【解答】

$x=a\sin\theta$ とおくと $dx=a\cos\theta\,d\theta,\ \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)} = a\cos\theta$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int\frac{1}{a\cos\theta}\cdot a\cos\theta\,d\theta = \int d\theta = \theta+C$$
$$\boldsymbol{= \sin^{-1}\frac{x}{a}+C}$$

(4) $\displaystyle\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$

【解答】$\boxed{解答}$ 1　　部分積分法を使うと

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx = x\sqrt{x^2+a^2}-\int x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \int\sqrt{x^2+a^2}\,dx - a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$
$$= \int\sqrt{x^2+a^2}\,dx - a^2\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C_1 \qquad (☜(1)\ より) \qquad \cdots\cdots ②$$

①，②より

$$\boldsymbol{\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right\}+C}$$

$\boxed{解答}$ 2　$\boldsymbol{\sqrt{x^2+a^2}=t-x}$ とおくと $x^2+a^2=t^2-2tx+x^2$

$\therefore\ x=\dfrac{t^2-a^2}{2t} = \dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{a^2}{t}\right),\qquad dx=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{a^2}{t^2}\right)dt$

$\sqrt{x^2+a^2} = t-x = t-\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{a^2}{t}\right) = \dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{a^2}{t}\right)$

よって

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \int\frac{1}{2}\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right)dt = \frac{1}{4}\int\left(t+\frac{2a^2}{t}+\frac{a^4}{t^3}\right)dt$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2}+2a^2\log|t|-\frac{a^4}{2t^2}\right)+C$$
$$= \frac{1}{8}\left(t^2-\frac{a^4}{t^2}\right)+\frac{a^2}{2}\log|t|+C$$
$$= \frac{1}{8}\left(t-\frac{a^2}{t}\right)\left(t+\frac{a^2}{t}\right)+\frac{a^2}{2}\log|t|+C$$
$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right\}+C}$$

無理関数の積分

$\boxed{2}$

$$I=\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\int x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

であることを用いて，第 1 式は部分積分法 $\left(\left(\sqrt{x^2+1}\right)'\text{を求める!}\right)$,

第 2 式は公式 $\displaystyle\boldsymbol{\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C_1}$ を用いて，不定積分 I を求めよ。

https://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q13256050743

【解答】

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\left\{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right\}'=\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$f(x)=x,\ g'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ とおけば $f'(x)=1,\ g(x)=\sqrt{x^2+1}$ である。

第 1 式

$$\int x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=x\cdot\sqrt{x^2+1}-\int 1\cdot\sqrt{x^2+1}\,dx$$
$$=x\sqrt{x^2+1}-\int\sqrt{x^2+1}\,dx$$
$$=x\sqrt{x^2+1}-I\ \cdots\cdots①$$

第 2 式

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C_1\ \cdots\cdots②$$

①, ② より

$$I=\int x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\left(x\sqrt{x^2+1}-I\right)+\left\{\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C_1\right\}$$
$$2I=x\sqrt{x^2+1}+\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C_1$$
$$\therefore\ I=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+1}+\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right\}+C}$$

$\boxed{3}$ 次の不定積分を求めよ。ただし，$a>0$ とする。

(1) $I=\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

【解答】 $f'(x)=1,\ g(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ とおけば $f(x)=x,\ g'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ である。

$$I=\int 1\cdot\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$
$$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int x\cdot\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$
$$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$
$$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$