n 個の正数の平均（相加平均・相乗平均）

3 つの正数 $a,\ b,\ c$ について、

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc} \cdots\cdots ①$$

[証明 1]　まず、$A,\ B,\ C$ が正の数であるとき、

$$\begin{aligned} & A^3+B^3+C^3-3ABC \\ = & (A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA) \end{aligned}$$

そして、

$$\begin{aligned} & A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA \\ = & \frac{1}{2}\left\{(A-B)^2+(B-C)^2+(C-A)^2\right\} \geqq 0 \qquad (\text{等号成立は } A=B=C \text{ の場合}) \end{aligned}$$

であることから、$A^3+B^3+C^3-3ABC \geqq 0$
となり、　$A^3+B^3+C^3 \geqq 3ABC$
ここで、$A=\sqrt[3]{a},\ B=\sqrt[3]{b},\ C=\sqrt[3]{c}$ とおくと

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$$

が得られます。

[証明 2]　2 つの正数 $a,\ b$ について、

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

であるから、4 つの正数 $a,\ b,\ c,\ d$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c+d}{4} &= \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right) \\ &\geqq \frac{1}{2}\left(\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\right) \geqq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} \end{aligned}$$

したがって、　$\dfrac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd} \cdots\cdots ②$
ここで、$d=\dfrac{a+b+c}{3}$ とおくと　$a+b+c=3d$ だから、

$$\frac{3d+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$$

つまり、　$d \geqq \sqrt[4]{abcd}$
両辺を 4 乗して d で割ると　$d^3 \geqq abc$
したがって　$d \geqq \sqrt[3]{abc}$
よって　$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$
② で等号成立は $a=b,\ c=d,\ ab=cd$ の場合で $a,\ b,\ c,\ d$ は正数であるから $a=b=c=d$
したがって ① で等号成立は　$a=b=c$ の場合である。