第１問 (必答問題)(配点 30)

〔1〕 不等式

$$\sin 2x > \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$$

を満たす x の範囲を求めよう。ただし，$0 \leqq x < 2\pi$ とする。

$a=\sin x,\ b=\cos x$ とおくと，与えられた不等式は

$$\boxed{\text{ア}}\,ab+\boxed{\text{イ}}\,a-\boxed{\text{ウ}}\,b-1>0$$

となる。左辺の因数分解を利用して x の範囲を求めると

$$\frac{\pi}{\boxed{\text{エ}}}<x<\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi \quad \text{または} \quad \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi<x<\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi$$

である。

〔2〕 不等式

$$2+\log_{\sqrt{y}}3<\log_y 81+2\log_y\left(1-\frac{x}{2}\right)$$

の表す領域を求めよう。

y と $\sqrt{y}$ は対数の底であるから $y>\boxed{\text{サ}}$，$y \fallingdotseq \boxed{\text{シ}}$ である。真数は正であるから $x<\boxed{\text{ス}}$ である。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という。

また

$$\log_{\sqrt{y}}3=\frac{\boxed{\text{セ}}}{\log_3 y},\quad \log_y 81=\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\log_3 y}$$

であるから，与えられた不等式は

$$1<\frac{\boxed{\text{タ}}}{\log_3 y}+\frac{\log_3\left(1-\dfrac{x}{2}\right)}{\log_3 y}$$

となる。よって

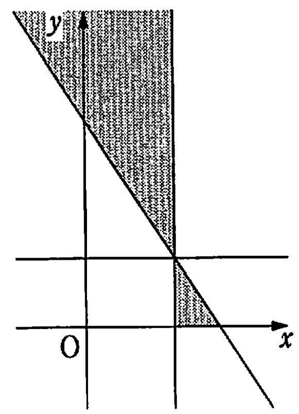
$$y>\boxed{\text{チ}} \quad \text{のとき},\ \log_3 y<\log_3\left\{\boxed{\text{ツ}}\left(1-\frac{x}{2}\right)\right\}$$

$$\boxed{\text{テ}}<y<\boxed{\text{チ}} \quad \text{のとき},\ \log_3 y>\log_3\left\{\boxed{\text{ツ}}\left(1-\frac{x}{2}\right)\right\}$$

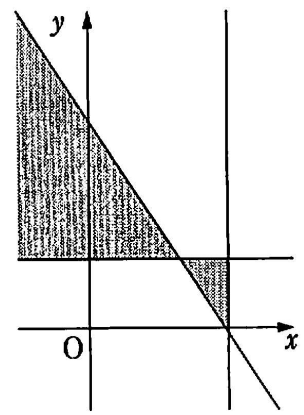
となる。

求める領域を図示すると，次の図 $\boxed{\text{ト}}$ の影をつけた部分となる。ただし，境界 (境界線) は含まない。$\boxed{\text{ト}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～③ のうちから一つずつ選べ。

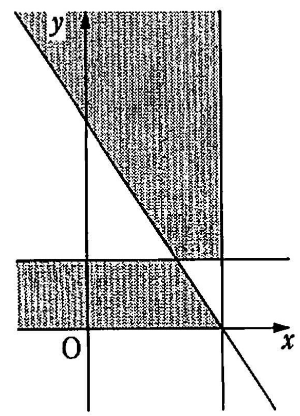
⓪



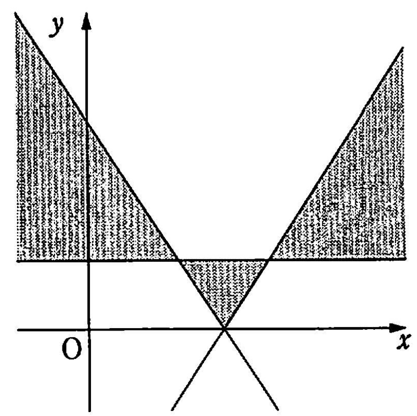
①



②



③



第2問 (必答問題)(配点 30)

$a>0$ として，x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ を

$$f(x)=x^3-x$$

$$g(x)=f(x-a)+2a$$

とする。

(1) 二つの関数の差 $g(x)-f(x)$ は

$$g(x)-f(x)=a\left(\boxed{\text{アイ}}\,x^2+\boxed{\text{ウ}}\,ax-a^2+\boxed{\text{エ}}\right)$$

と表され，x の方程式 $g(x)-f(x)=0$ が異なる二つの実数解をもつような a の範囲は

$$0<a<\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$$

である。

また，$g(x)-f(x)$ は $x=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のとき，最大値

$$\frac{a}{\boxed{\text{ケ}}}\left(\boxed{\text{コサ}}-a^{\boxed{\text{シ}}}\right)$$

をとる。

(2) (1) で得られた最大値を

$$h(a)=\frac{a}{\boxed{\text{ケ}}}\left(\boxed{\text{コサ}}-a^{\boxed{\text{シ}}}\right)$$

と表す。$h(a)$ を a の関数と考えるとき，$h(a)$ は $a=\boxed{\text{ス}}$ で最大値 $\boxed{\text{セ}}$ をとる。

(3) $a=\sqrt{3}$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ の二つの交点 P, Q の座標は

$$\mathrm{P}\left(\boxed{\text{ソ}},\ 0\right),\ \mathrm{Q}\left(\sqrt{\boxed{\text{タ}}},\ \boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}\right)$$

であり，二つの曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

である。

さらに，交点 $\mathrm{P}\left(\boxed{\text{ソ}},\ 0\right)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線と曲線 $y=g(x)$ の接線がなす角を $\theta\left(0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$\tan\theta=\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$

である。

第3問 (選択問題)(配点 20)

三つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ がある。

(1) 数列 $\{a_n\}$ は，初項が -27 で，漸化式

$$a_{n+1}=3\,a_n+60\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする。このとき

$$a_n=\boxed{\text{ア}}^{\,n}-\boxed{\text{イウ}}$$

である。数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\left(\boxed{\text{カ}}^{\,n}-\boxed{\text{キ}}\right)-\boxed{\text{イウ}}\,n$$

である。また，$S_n>0$ となる最小の自然数 n は $\boxed{\text{ク}}$ である。

(2) 第 n 項が $2b_n+c_n$ で与えられる数列 $\{2b_n+c_n\}$ は，初項が 0 で公差が d の等差数列になり，第 n 項が b_n-2c_n で与えられる数列 $\{b_n-2c_n\}$ は，初項が x で公比が r の等比数列になるとする。このとき b_n+c_n は

$$b_n+c_n=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}d(n-1)-\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}xr^{n-1}$$

と表される。

(3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ は (1), (2) を満たすとする。さらに，第 n 項が b_n+c_n で与えられる数列 $\{b_n+c_n\}$ の階差数列は，数列 $\{a_n\}$ であるとする。このとき

$$a_n=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}d+\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}x(1-r)r^{n-1}$$

であるから，(1) より

$$r=\boxed{\text{ス}},\ x=\frac{\boxed{\text{セソタ}}}{\boxed{\text{チ}}},\ d=\boxed{\text{ツテト}}$$

である。したがって，数列 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ の第 n 項は，それぞれ

$$b_n=-\frac{\boxed{\text{ナ}}^{\,n}}{\boxed{\text{ニ}}}-\boxed{\text{ヌネ}}\,(n-1)$$

$$c_n=\boxed{\text{ノ}}^{\,n}-\boxed{\text{ハヒ}}\,(n-1)$$

である。

第4問 (選択問題)(配点 20)

点 O を原点とする座標空間に 4 点 A(1, 0, 0), B(0, 1, 1), C(1, 0, 1), D(−2, −1, −2) がある。$0<a<1$ とし，線分 AB を $a:(1-a)$ に内分する点を E，線分 CD を $a:(1-a)$ のに内分する点を F とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ は a を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\left(\boxed{\text{アイ}}\,a,\ \boxed{\text{ウエ}}\,a,\ \boxed{\text{オ}}-\boxed{\text{カ}}\,a\right)$$

と表される。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるのは $a=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のときである。

(2) $a=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ とする。$0<b<1$ として，線分 EF を $b:(1-b)$ に内分する点を G とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ は b を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\left(\frac{\boxed{\text{ケ}}-\boxed{\text{コ}}\,b}{\boxed{\text{サ}}},\ \frac{\boxed{\text{シ}}-\boxed{\text{ス}}\,b}{\boxed{\text{サ}}},\ \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)$$

と表される。

(3) (2) において，直線 OG と直線 BC が交わるときの b の値と，その交点 H の座標を求めよう。

点 H は直線 BC 上にあるから，実数 s を用いて $\overrightarrow{\mathrm{BH}}=s\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と表される。また，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ と表される。よって

$$b=\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}},\quad s=\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}},\quad t=\boxed{\text{テ}}$$

である。したがって，点 H の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}},\ \frac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ナ}}},\ \boxed{\text{ネ}}\right)$$

である。また，点 H は線分 BC を $\boxed{\text{ノ}}:1$ に外分する.

第5問 (選択問題)(配点 20)

次の表は，P 高校のあるクラス 20 人について，数学と国語のテストの得点をまとめたものである。数学の得点を変量 x，国語の得点を変量 y で表し，x，y の平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$ で表す。ただし，表の数値はすべて正確な値であり，四捨五入されていないものとする。

生徒番号	x	y	$x-\overline{x}$	$(x-\overline{x})^2$	$y-\overline{y}$	$(y-\overline{y})^2$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
1	62	63	3.0	9.0	2.0	4.0	6.0
2	56	63	3.0	9.0	2.0	4.0	−6.0
3	58	58	−1.0	1.0	−3.0	9.0	3.0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
18	54	62	−5.0	25.0	1.0	1.0	−5.0
19	58	60	−1.0	1.0	−1.0	1.0	1.0
20	57	63	−2.0	4.0	2.0	4.0	−4.0
合計	A	1220	0.0	1544.0	0.0	516.0	−748.0
平均	B	61.0	0.0	77.2	0.0	25.8	−37.4
中央値	57.5	62.0	−1.5	30.5	1.0	9.0	−14.0

以下，小数の形で解答する場合は，指定された桁(けた)数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ。途中で割り切れた場合は，指定された桁まで ⓪ にマークすること。

(1) 生徒番号 1 の生徒の $x-\overline{x}$ の値が 3.0 であることに着目すると，表中の B の値は $\boxed{\text{アイ}}.\boxed{\text{ウ}}$ であり，A の値は $\boxed{\text{エオカキ}}$ である。

(2) 変量 x の分散は $\boxed{\text{クケ}}.\boxed{\text{コ}}$ である。

(3) $z=x+y$ とおくと，この場合の変量 z の平均値 $\overline{z}$ は $\boxed{\text{サシス}}.\boxed{\text{セ}}$ である。また，変量 z の分散は

$$(z-\overline{z})^2=(x-\overline{x})^2+(y-\overline{y})^2+2(x-\overline{x})(y-\overline{y})$$

の平均であるから

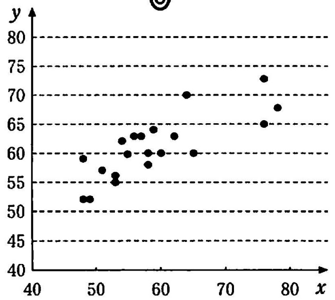
$$(z\text{ の分散})\ \boxed{\text{ソ}}\ \{(x\text{ の分散})+(y\text{ の分散})\}$$

が成り立つ。ただし，$\boxed{\text{ソ}}$ については，当てはまるものを，次の ⓪ 〜② のうちから一つ選べ。

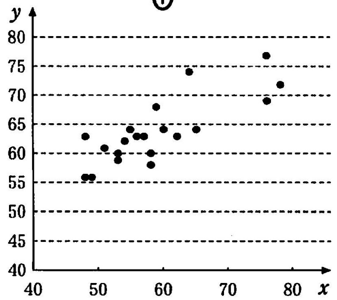
⓪ $>$　　① $=$　　② $<$

(4) 変量 x と変量 y の相関図 (散布図) として適切なものは，相関関係，平均値，中央値に注意すると，$\boxed{\text{タ}}$ である。ただし, 相関図 (散布図) 中の点は，度数 1 を表す。$\boxed{\text{タ}}$ については，当てはまるものを，次の ⓪ ～③ のうちから一つ選べ。

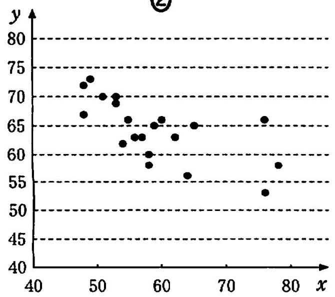
⓪



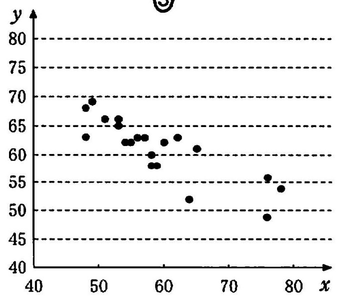
①



②



③



さらに，P 高校の 20 人の数学の得点と Q 高校のあるクラス 25 人の数学の得点を比較するために，それぞれの度数分布表を作ったところ，次のようになった。

階　級	P 高校	Q 高校
以上　以下		
35 ～ 39	0	5
40 ～ 44	0	5
45 ～ 49	3	0
50 ～ 54	4	0
55 ～ 59	6	0
60 ～ 64	3	10
65 ～ 69	1	2
70 ～ 74	0	2
75 ～ 79	3	1
計	20	25

(5) 二つの高校の得点の中央値については，$\boxed{\text{チ}}$ 。$\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～③ のうちから一つ選べ。

⓪ P 高校の方が大きい
① Q 高校の方が大きい
② P 高校と Q 高校で等しい
③ 与えられた情報からはその大小を判定できない

(6) 度数分布表からわかる Q 高校の得点の平均値のとり得る範囲は $\boxed{\text{ツテ}}.\boxed{\text{ト}}$ 以上 $\boxed{\text{ナニ}}.\boxed{\text{ヌ}}$ 以下である。また，(1) より P 高校の得点の平均値は $\boxed{\text{アイ}}.\boxed{\text{ウ}}$ であるから，二つの高校の得点の平均値については，$\boxed{\text{ネ}}$ 。ただし $\boxed{\text{ネ}}$ については，当てはまるものを，次の ⓪ ～③ のうちから一つ選べ。

⓪ P 高校の方が大きい
① Q 高校の方が大きい
② P 高校と Q 高校で等しい
③ 与えられた情報からはその大小を判定できない

(7) 次の謎のうち，**誤っているもの**は $\boxed{\text{ノ}}$ である。$\boxed{\text{ノ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～③ のうちから一つ選べ。

⓪ 40 点未満の生徒の割合は, Q 高校の方が大きい。
① 54 点以下の生徒の割合は, Q 高校の方が大きい。
② 65 点以上の生徒の割合は, Q 高校の方が大きい。
③ 70 点以上の生徒の割合は, P 高校の方が大きい。

第6問 (選択問題)(配点 20)

二分法を用いて 5 の 3 乗根の近似値を計算するために，次の〔プログラム 1〕を作った。

〔プログラム 1〕

```
100 LET A=0
110 LET B=2
120 INPUT N
130 FOR I=1 TO N
140     LET C=(A+B)/2
150     LET D=C*C*C-5
160     IF D<0 THEN LET A=C
170     IF D>=0 THEN LET B=C
180 NEXT I
190 PRINT A
200 PRINT B
210 END
```

以下，小数の形で解答する場合は，指定された桁(けた)数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ。途中で割り切れた場合は，指定された桁まで ⓪ にマークすること。

(1) 変数 N に 3 を入力したとき，出力される変数 A の値は $\boxed{\text{ア}}.\boxed{\text{イウ}}$ であり，変数 B の値は $\boxed{\text{エ}}.\boxed{\text{オカ}}$ である。

(2) 変数 N に 5 を入力したとき，出力される変数 A と変数 B の値の差 B-A は $\boxed{\text{キ}}.\boxed{\text{クケコサ}}$ である。

(3) 出力される変数 A と変数 B の値の差 B-A が 0.001 以下になるようにしたい。変数 N に入力すべき整数のうち，最小のものは $\boxed{\text{シス}}$ である。

(4) 2 次方程式 $x^2-2x-4=0$ の大きい方の解の近似値を求めるために，〔プログラム 1〕の 150 行を

```
150    LET D=C*C-2*C-4
```

のように変更し，さらに 100 行と 110 行を $\boxed{\text{セ}}$ のように変更した〔プログラム 2〕を作った。$\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～③ のうちから一つ選べ。

⓪ 100 LET A = 0 / 110 LET B = 1

① 100 LET A = 1 / 110 LET B = 2

② 100 LET A = 2 / 110 LET B = 3

③ 100 LET A = 3 / 110 LET B = 4

(5) (4) の〔プログラム 2〕を変更して，2 次方程式 $x^2-2x-4=0$ の小さい方の解の近似値を求める。まず，〔プログラム 2〕の 100 行と 110 行を

```
100 LET A=-2
110 LET B=-1
```

のように変更し，さらに 150 行から 170 行に変更を加えることを考える。次の変更のうち， N に入力する値を大きくしても A，B の値が解に**近づかないもの**は $\boxed{\text{ソ}}$ である。$\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～③ のうちから一つ選べ。

⓪
```
150    LET D = C*C - 2*C - 4
160    IF D < 0 THEN LET B = C
170    IF D >= 0 THEN LET A = C
```

①
```
150    LET D = C*C - 2*C - 4
160    IF D > 0 THEN LET A = C
170    IF D <= 0 THEN LET B = C
```

②
```
150    LET D = (C*C - 2*C - 4)*(B*B - 2*B - 4)
160    IF D < 0 THEN LET A = C
170    IF D >= 0 THEN LET B = C
```

③
```
150    LET D = (C*C - 2*C - 4)*(A*A - 2*A - 4)
160    IF D < 0 THEN LET A = C
170    IF D >= 0 THEN LET B = C
```