

一次不定方程式の解法 (裏技)

https://www.youtube.com/watch?v=f4U_ubGtTNg

1 等式 $105x + 38y = 1$ を満たす整数 x, y の組を求めよ。

ユークリッド互除法とその逆より

$$\begin{aligned} 105 &= 38 \cdot 2 + 29 && \text{移項して} && 29 &= 105 - 38 \cdot 2 && \dots\dots \text{①} \\ 38 &= 29 \cdot 1 + 9 && \text{移項して} && 9 &= 38 - 29 \cdot 1 && \dots\dots \text{②} \\ 29 &= 9 \cdot 3 + 2 && \text{移項して} && 2 &= 29 - 9 \cdot 3 && \dots\dots \text{③} \\ 9 &= 2 \cdot 4 + 1 && \text{移項して} && 1 &= 9 - 2 \cdot 4 && \dots\dots \text{④} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 4 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \\ \hline 2 \) \ 9 \) \ 29 \) \ 38 \) \ 105 \\ \quad 8 \quad 27 \quad 29 \quad 76 \\ \hline \qquad 1 \quad 2 \quad 9 \quad 29 \end{array}$$

④ に ③, ②, ① を順次代入すると

$$\begin{aligned} 1 &= 9 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \\ 1 &= 9 \cdot 1 - (29 - 9 \cdot 3) \cdot 4 && \Rightarrow 2 \text{ を消す} \\ &= -29 \cdot 4 + 9 \cdot (1 + 4 \cdot 3) \\ &= -29 \cdot 4 + 9 \cdot 13 \\ 1 &= -29 \cdot 4 + (38 - 29 \cdot 1) \cdot 13 && \Rightarrow 9 \text{ を消す} \\ &= 38 \cdot 13 - 29 \cdot (4 + 13 \cdot 1) \\ &= 38 \cdot 13 - 29 \cdot 17 \\ 1 &= 38 \cdot 13 - (105 + 38 \cdot 2) \cdot 17 && \Rightarrow 29 \text{ を消す} \\ &= -105 \cdot 17 + 38 \cdot (13 + 17 \cdot 2) \\ &= 105 \cdot (-17) + 38 \cdot 47 \end{aligned}$$

したがって, $x = -17, y = 47$ 答

【裏技】 13, 17, 47 の求め方

【準備】

step 1 左上に「1」を書く
step 2 「1」の右隣に下の数字と同じ数字を書く

$$\begin{array}{r} \text{①} \quad \boxed{4} \\ \parallel \\ 4 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \\ \hline 2 \) \ 9 \) \ 29 \) \ 38 \) \ 105 \\ \quad 8 \quad 27 \quad 29 \quad 76 \\ \hline \qquad 1 \quad 2 \quad 9 \quad 29 \end{array}$$

① を求める。

$$\begin{array}{r} 1 \quad 4 \quad \boxed{\text{①}} \\ \quad 4 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \\ \hline 2 \) \ 9 \) \ 29 \) \ 38 \) \ 105 \\ \quad 8 \quad 27 \quad 29 \quad 76 \\ \hline \qquad 1 \quad 2 \quad 9 \quad 29 \end{array}$$

① = 1 + 4 · 3 = 13

② を求める。

$$\begin{array}{r} 1 \quad 4 \quad 13 \quad \boxed{\text{②}} \\ \quad 4 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \\ \hline 2 \) \ 9 \) \ 29 \) \ 38 \) \ 105 \\ \quad 8 \quad 27 \quad 29 \quad 76 \\ \hline \qquad 1 \quad 2 \quad 9 \quad 29 \end{array}$$

② = 4 + 13 · 1 = 17

③ を求める。

$$\begin{array}{r} 1 \quad 4 \quad 13 \quad 17 \quad \boxed{\text{③}} \\ \quad 4 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \\ \hline 2 \) \ 9 \) \ 29 \) \ 38 \) \ 105 \\ \quad 8 \quad 27 \quad 29 \quad 76 \\ \hline \qquad 1 \quad 2 \quad 9 \quad 29 \end{array}$$

③ = 13 + 17 · 2 = 47

【完成】

完成品

$$\begin{array}{r} 1 \quad 4 \quad 13 \quad 17 \quad 47 \\ \quad 4 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \\ \hline 2 \) \ 9 \) \ 29 \) \ 38 \) \ 105 \\ \quad 8 \quad 27 \quad 29 \quad 76 \\ \hline \qquad 1 \quad 2 \quad 9 \quad 29 \end{array}$$

$105 \cdot 17 = 1785$, $38 \cdot 47 = 1786$ だから
 $105 \cdot (-17) + 38 \cdot 47 = 1$
したがって, $x = -17, y = 47$