

偽コインの問題 No.2

12 枚うち 1 枚だけ重さが違う

見た目では区別できないコイン 12 枚うち 1 枚だけ重さが違う (重いか軽いかわからない)。
天秤を 3 回使うだけで、どのコインが偽物か (重いか軽いか) を当てよ。

解答のページ

解答

コインに番号 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 をつける。

1 回目は 4 枚ずつ乗せて量る。その結果は

- [1] $\downarrow(1, 2, 3, 4) \nearrow (5, 6, 7, 8) \uparrow$, [2] $\uparrow(1, 2, 3, 4) \searrow (5, 6, 7, 8) \downarrow$
[3] $(1, 2, 3, 4) \text{ — } (5, 6, 7, 8)$ のいずれかとなる。

[1] $\downarrow(1, 2, 3, 4) \nearrow (5, 6, 7, 8) \uparrow$ のとき,

釣り合わないから, 9, 10, 11, 12 は「普通のコイン」である。

つまり, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 の 8 枚の中に 1 枚だけ重さが違うコインがあり,

条件『1, 2, 3, 4 は「軽くないコイン」であり, 5, 6, 7, 8 は「重くないコイン」である。』

のもとで, 天秤を 2 回だけ使かって当てるとい問題なのである。

2 回目は 3 枚ずつ量る。

(1) $\downarrow(1, 2, 5) \nearrow (3, 4, 6) \uparrow$ のとき

釣り合わないので, 7, 8 のコインは「普通のコイン」である。

3, 4, 5 のコインは 1 回目と 2 回目の結果が違うから「普通のコイン」である。

残った 3 枚のコインで, 1, 2 は「軽くないコイン」, 6 は「重くないコイン」である。

3 回目は「軽くないコイン」の 1 と 2 を比べる。その結果が

(i) $\downarrow(1) \nearrow (2) \uparrow$ のとき,

釣り合わないから, 6 のコインは「普通のコイン」である。

2 のコインは 2 回目と 3 回目の結果が違うから「普通のコイン」である。

消去法で, 1 のコインが「重いコイン (偽物)」である。

(ii) $\uparrow(1) \searrow (2) \downarrow$ のとき,

釣り合わないから, 6 のコインは「普通のコイン」である。

1 のコインは 2 回目と 3 回目の結果が違うから「普通のコイン」である。

消去法で, 2 のコインが「重いコイン (偽物)」である。

(iii) (1) — (2) のとき,

釣り合ったので, 1 と 2 のコインは「普通のコイン」である。

消去法で, 6 のコインが「軽いコイン (偽物)」である。

(2) $\uparrow(1, 2, 5) \searrow (3, 4, 6) \downarrow$ のとき

釣り合わないので, 7, 8 のコインは「普通のコイン」である。

1, 2, 6 のコインは 1 回目と 2 回目の結果が違うから「普通のコイン」である。

残った 3 枚のコインで, 3, 4 は「軽くないコイン」, 5 は「重くないコイン」である。

3 回目は「軽くないコイン」の 3 と 4 を比べる。その結果が

(i) $\downarrow(3) \nearrow (4) \uparrow$ のとき, 3 のコインが「重いコイン (偽物)」である。

(ii) $\uparrow(3) \searrow (4) \downarrow$ のとき, 4 のコインが「重いコイン (偽物)」である。

(iii) (3) — (4) のとき, 釣り合ったので, 3 と 4 のコインは「普通のコイン」である。

消去法で, 5 のコインが「軽いコイン (偽物)」である。

(3) (1, 2, 5) — (3, 4, 6) のとき,

釣り合ったので, 1, 2, 3, 4, 5, 6 のコインは「普通のコイン」である。

3 回目は 7 と 8 を比べる。

7, 8 は「重くないコイン」だったので軽いほうが「軽いコイン (偽物)」である。

[2] $\uparrow(1, 2, 3, 4) \searrow (5, 6, 7, 8) \downarrow$ のときは, [1] と同様にできる。

続きのページ

続き

[3] (1, 2, 3, 4) — (5, 6, 7, 8) のとき,

釣り合ったので, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 のコインは「普通のコイン」である。9, 10, 11, 12 の中に偽物である。

「普通のコイン」は ① と表すと今度は, ①, ②, ③, ④, 9, 10, 11, 12 の 8 枚の中に 1 枚だけ重さが違うコインがあり, 天秤を 2 回だけ使かって当てるとい問題なのである。

2 回目 は 3 枚ずつ量る。

(1) ↓(①, ②, ③) / (9, 10, 11) ↑ のとき,

9, 10, 11 の中に 1 枚だけ「軽いコイン」がある。3 回目は 9 と 10 を比べる。

釣り合わなかったら, 軽いほうが「軽いコイン (偽物)」で, 釣り合えば 11 が「軽いコイン (偽物)」である。

(2) ↑(①, ②, ③) \ (9, 10, 11) ↓ のとき,

9, 10, 11 の中に 1 枚だけ「重いコイン」がある。3 回目は 9 と 10 を比べる。

釣り合わなかったら, 重いほうが「重いコイン (偽物)」で, 釣り合えば 11 が「重いコイン (偽物)」である。

(3) (①, ②, ③) — (9, 10, 11) のとき, 12 が偽物である

① と 12 を比べ, 12 が重いとき「重いコイン (偽物)」で, 軽いとき「軽いコイン (偽物)」である。

結局, 12 枚の問題は, 1 回目に 4 枚ずつ量れば,

『8 枚のうち 1 枚だけ重さが違う (重いか軽いかわからない)。1 回目で得られた情報をもとに, 天秤を後 2 回使うだけで, どのコインが偽物が (重いか軽いか) を当てよ。』という 8 枚の問題に帰着する。

2 回目の結果で, 偽物のコインを 3 枚以下に絞りこめば, 成功となります。

また, [1] の (1) では, 3 枚ずつの組合せを, (1, 2, 5), (3, 6, ⑨) としてもできますが, あえて ⑨ を使う必要もないでしょう。