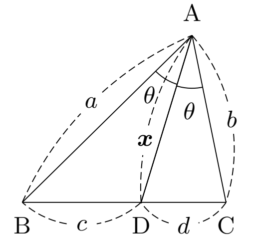
角の二等分線の長さ（スチュワートの定理）

$\triangle$ABC の $\angle$A の二等分線と BC との交点を D とする。

$\mathrm{AB}=a,\ \mathrm{AC}=b,\ \mathrm{BD}=c,\ \mathrm{DC}=d,\ \mathrm{AD}=x$ のとき

(1) $\boldsymbol{x=\sqrt{ab-cd}}$



【証明】

(1) 【初等幾何】

$\triangle$ABC の $\angle$A の二等分線が外接円と交わる点を E とすると，

$\triangle\mathrm{ABD}\backsim\triangle\mathrm{AEC}$ であるから，

$$\mathrm{AB}:\mathrm{AD}=\mathrm{AE}:\mathrm{AC} \text{ よって } \mathbf{AD\cdot AE=AB\cdot AC} \cdots\cdots ①$$

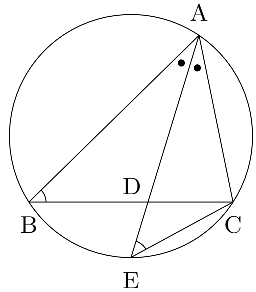
方べきの定理より

$$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DE}=\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC} \qquad \mathrm{AD}\cdot(\mathrm{AE}-\mathrm{AD})=\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}$$

よって $\mathbf{AD\cdot AE-AD^2=BD\cdot DC}$ $\cdots\cdots$②

①, ② より $\mathbf{AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot DC}$

(注) $\mathbf{AE=\dfrac{AB\cdot AC}{AD}}$



【三角比利用】

(i) $a=b$ のとき，$c=d,\ \angle\mathrm{ADB}=90^\circ$ より $x=\sqrt{a^2-c^2}$

また，$\sqrt{ab-cd}=\sqrt{a^2-c^2}$ より $\boldsymbol{x=\sqrt{ab-cd}}$ が成り立つ。

(ii) $a\fallingdotseq b$ のとき

$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{CAD}=\theta$ とすると，

$\triangle$ABD と $\triangle$ACD に余弦定理を用いて，$\cos\theta$ を表すと，

$$\frac{x^2+a^2-c^2}{2xa}=\frac{x^2+b^2-d^2}{2xb} \cdots\cdots ①$$

AD が $\angle$A の二等分線であるから，

$a:b=c:d$ の関係があるから， $\qquad c=ak,\ d=bk$ $\cdots\cdots$②

①, ② より

$$b\{x^2+a^2(1-k^2)\}=a\{x^2+b^2(1-k^2)\}$$
$$(b-a)x^2=ab(1-k^2)(b-a)$$

$a\fallingdotseq b$ より $x^2=ab(1-k^2)=ab-(ak)\cdot(bk)=ab-cd$

(i), (ii) より，$\boldsymbol{x=\sqrt{ab-cd}}$ が成り立つ。

【例題】

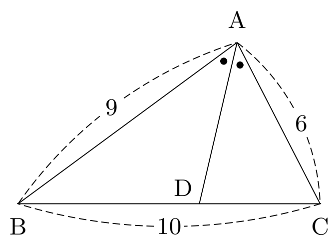
$\triangle$ABC の $\angle$A の二等分線と BC との交点を D とする。

$\mathrm{AB}=9,\ \mathrm{AC}=6,\ \mathrm{BC}=10$ のとき，AD の長さを求めよ。

【解答】 $\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=9:6=3:2$

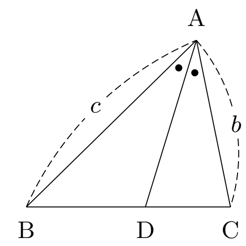
よって，$\mathrm{BD}=6,\ \mathrm{DC}=4$

$$\mathrm{AD}=\sqrt{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}-\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}}=\sqrt{9\cdot6-6\cdot4}=\boldsymbol{\sqrt{30}}$$



内角の二等分線の長さ

△ABC の ∠A の二等分線と BC との交点を D とする。



(1) $\mathbf{AD} = \dfrac{\boldsymbol{2bc\cos\dfrac{A}{2}}}{\boldsymbol{b+c}}$

(2) $\mathbf{AD} = \dfrac{\boldsymbol{2\sqrt{bcs(s-a)}}}{\boldsymbol{b+c}}$ ただし，$s = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$

【証明】

(1) $\mathrm{AD} = x$ とすると，$\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{ABD} + \triangle\mathrm{ACD}$ より

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}cx\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}bx\sin\frac{A}{2}$$

$$bc\sin A = (b+c)x\sin\frac{A}{2}$$

また，$\sin A = 2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$ であるから

$$2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = (b+c)x\sin\frac{A}{2}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}}$$

(2) 半角の公式と余弦定理より

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}$$

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc} = \frac{s(s-a)}{bc}$$

$0^\circ < \dfrac{A}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ より $\sin\dfrac{A}{2} > 0,\ \cos\dfrac{A}{2} > 0$

したがって，

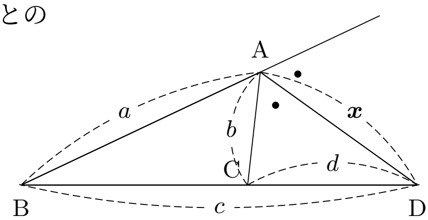
$$\boldsymbol{\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\ \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},\ \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}}$$

よって，$x = \dfrac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{b+c} = \dfrac{2bc}{b+c}\cdot\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}} = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}}$

外角の二等分線の長さ

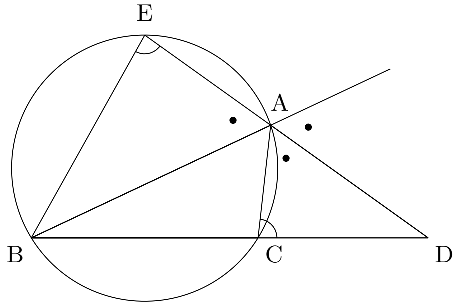
△ABC の 頂点 A における外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を D とする。
AB $= a$, AC $= b$, BD $= c$, DC $= d$, AD $= x$ のとき

$$\boldsymbol{x = \sqrt{cd - ab}}$$



【証明】

【初等幾何】



頂点 A における外角の二等分線と △ABC の外接円との交点を E とすると,
△ACD ∽ △AEB であるから,

$$\mathrm{AC} : \mathrm{AD} = \mathrm{AE} : \mathrm{AB}$$

よって $\mathbf{AD \cdot AE = AB \cdot AC}$ ……①

方べきの定理より

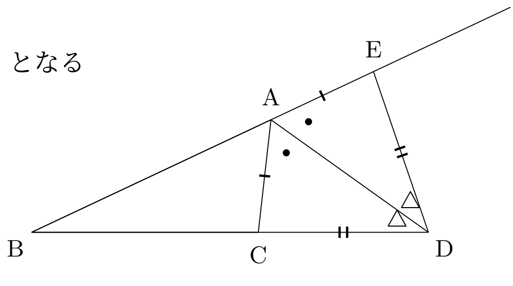
$$\mathrm{DA} \cdot \mathrm{DE} = \mathrm{DC} \cdot \mathrm{DB}$$

$$\mathrm{AD} \cdot (\mathrm{AD} + \mathrm{AE}) = \mathrm{BD} \cdot \mathrm{DC}$$

よって $\mathbf{AD^2 + AD \cdot AE = BD \cdot DC}$ ……②

①, ② より $\mathbf{AD^2 = BD \cdot DC - AB \cdot AC}$

$\boxed{\text{別}}$



右図のように，線分 BA の A の側への延長線上に AE = AC となる点 E をとると,

$$\triangle\mathrm{ACD} \equiv \triangle\mathrm{AED}$$

したがって,

$$\angle\mathrm{ADC} = \angle\mathrm{ADE}, \ \mathrm{DC} = \mathrm{DE}$$

となる。

線分 DA は △DBE の二等分線であるから,

$$\mathrm{DA}^2 = \mathrm{DB} \cdot \mathrm{DE} - \mathrm{BA} \cdot \mathrm{AE}$$

が成り立つ。よって,

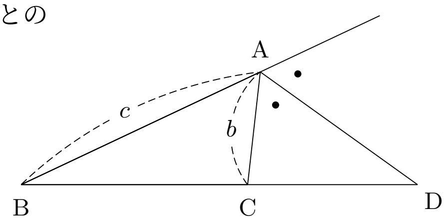
$$\mathrm{AD}^2 = \mathrm{DB} \cdot \mathrm{DC} - \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC}$$

を得る。

外角の二等分線の長さ

△ABC の 頂点 A における外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を D とする。

$$\mathbf{AD} = \frac{\boldsymbol{2bc\sin\frac{A}{2}}}{\boldsymbol{b \sim c}}$$



【証明】

(1) $c > b$, $\mathrm{AD} = x$ とすると，

△ABC = △ABD − △ACD より

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}cx\sin\frac{\pi + A}{2} - \frac{1}{2}bx\sin\frac{\pi - A}{2}$$

ここで，$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$，$\sin\frac{\pi + A}{2} = \sin\frac{\pi - A}{2} = \cos\frac{A}{2}$ であるから

$$2bc\sin\frac{A}{2} = (c - b)x$$

を得る。したがって

$$\boldsymbol{x = \frac{2bc\sin\frac{A}{2}}{c - b}}$$