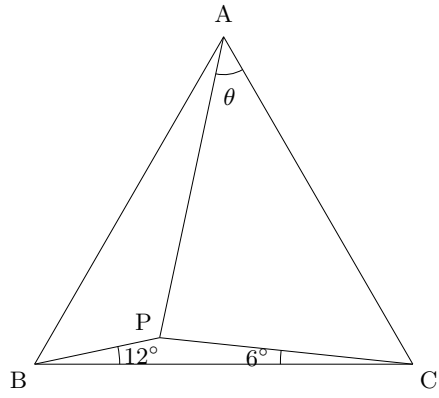
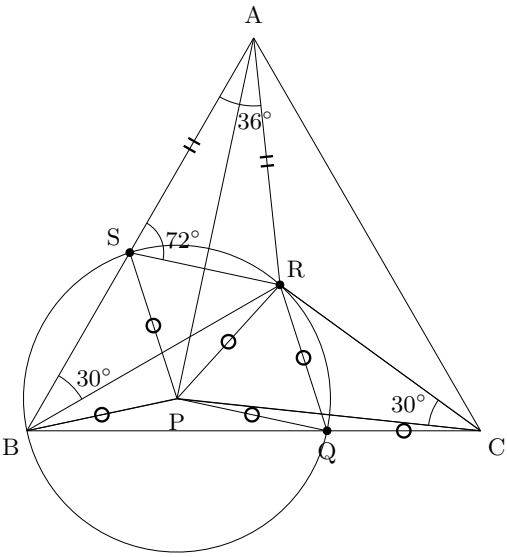
整角三角形 T(48,12,6,54)

問 正三角形 ABC の内部に点 P を
$\angle PBC = 12°,\ \angle PCB = 6°$
となるようにとるとき、$\angle PAC$ の大きさを求めよ。



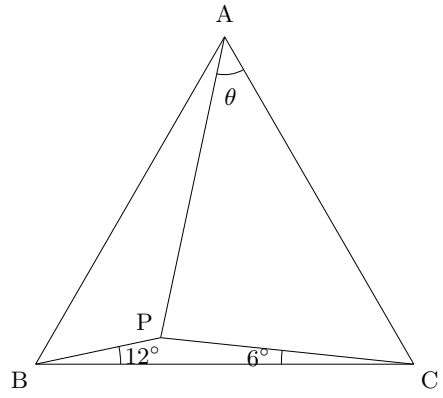
【求め方 1 】

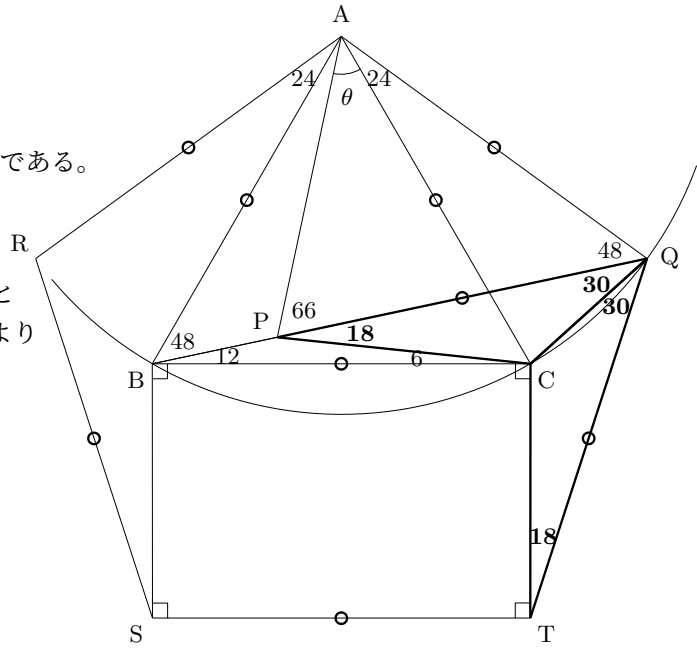
線分 BC 上に $\angle BPQ = 156°$ となるように点 Q をとると,
$\angle PBC = \angle PQB = 12°$ より $PB = PQ$
$\angle QPC = \angle QCP = 6°$ より $QP = QC$
ここで, 点 R が直線 PQ から見て点 B と反対側にくるように正三角形 RPQ を作ると
$QC = QP = QR$ より点 Q は $\triangle CPR$ の外心である。
よって $\angle PCR = \dfrac{1}{2}\angle PQR = 30°$, $\angle BCR = 6° + 30° = 36°$
同様に $PB = PQ = PR$ より点 P は $\triangle BQR$ の外心である。
よって $\angle QBR = \dfrac{1}{2}\angle QPR = 30°$
$\angle ABR = 60° - 30° = 30°$
2 辺と夾角相等より $\triangle BAR \equiv \triangle BCR$
$\angle BAR = \angle BCR = 36°$ ……①
$\triangle BQR$ の外接円と線分 AB との交点で点 B と異なる点を S とすると
$\angle ASR = \angle BQR = 12° + 60° = 72°$ ……②
①, ② より $\angle ARS = 180° - (72° + 36°) = 72° = \angle ASR$
よって $AR = AS$
3 辺相等より $\triangle ASP \equiv \triangle ARP$
$\angle SAP = \angle RAP = \dfrac{1}{2}\angle SAR = 18°$
$\angle PAC = 60° - 18° = \mathbf{42°}$



整角三角形 T(48,12,6,54)

問 正三角形 ABC の内部に点 P を
$\angle PBC = 12°$, $\angle PCB = 6°$
となるようにとるとき、$\angle PAC$ の大きさを求めよ。



【求め方 2 】

図において，単位 (°) は省略する。
点 Q は，辺 BP の点 P の方への延長線上で
$\angle AQB = 48°$ の位置にあるとする。
$AB = AQ = AC$ より，点 A は $\triangle BQC$ の外心である。
$\angle BQC = \dfrac{1}{2}\angle BAC = 30°$
$\angle CAQ = 2\angle CBQ = 24°$
辺 AQ を一辺とする正五角形 ARSTQ を作ると
$\angle BAR = 108° - (60° + 24°) = 24° = \angle CAQ$ より
四角形 BSTC は長方形である。
$\angle CQT = 108° - (48° + 30°) = 30° = \angle CQB$
$\angle CTQ = 108° - 90° = 18° = \angle CPQ$
CQ が共通だから，$\triangle CQP \equiv \triangle CQT$
よって， $PQ = TQ = AQ$
$\angle QAP = \angle QPA = \dfrac{1}{2}(180° - 48°) = 66°$
$\angle PAC = 66° - 24° = \mathbf{42°}$