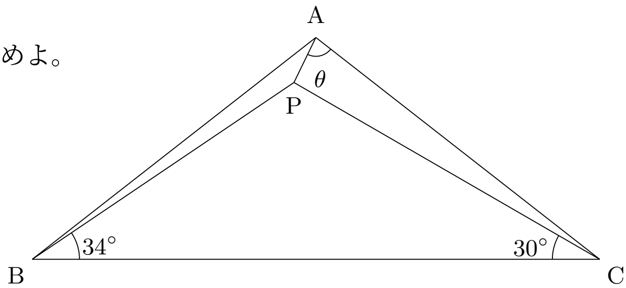
整角三角形 T(4,34,30,8)

$\boxed{問}$ $A = 104°$ の二等辺三角形 ABC の内部に点 P を

$\angle\mathrm{PBC} = 34°$, $\angle\mathrm{PCB} = 30°$

となるようにとるとき、$\angle\mathrm{PAC}$ の大きさを求めよ。



【求め方 1】

$\angle\mathrm{ABP} = 4°$, $\angle\mathrm{ACP} = 8°$

$\triangle\mathrm{BCP}$ の外心を O とすると，$\angle\mathrm{BOP} = 2\angle\mathrm{BCP} = 60°$ より

$\triangle\mathrm{BOP}$ は正三角形である。

三辺相等より

$\triangle\mathrm{ABO} \equiv \triangle\mathrm{ACO}$

$\angle\mathrm{BAO} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{BAC} = 52°$

$\angle\mathrm{ABO} = 4° + 60° = 64°$

$\angle\mathrm{AOB} = 180° - (52° + 64°) = 64° = \angle\mathrm{ABO}$

したがって，$\mathrm{AB} = \mathrm{AO}$

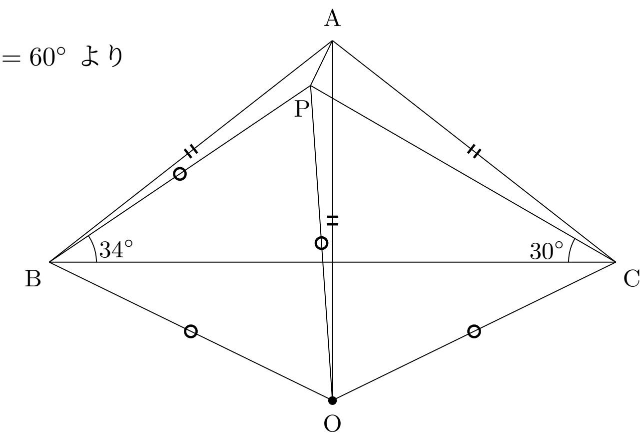
三辺相等より

$\triangle\mathrm{ABP} \equiv \triangle\mathrm{AOP}$

$\angle\mathrm{PAB} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{BAO} = 26°$

$\angle\mathrm{PAC} = 104° - 26° = \mathbf{78°}$

また，$\angle\mathrm{APC} = 180° - (8° + 78°) = \mathbf{94°}$



整角三角形 $T(a, b, c, d)$

一般に，$\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ の二等辺三角形において

$b = a + 30°$, $c = 30°$

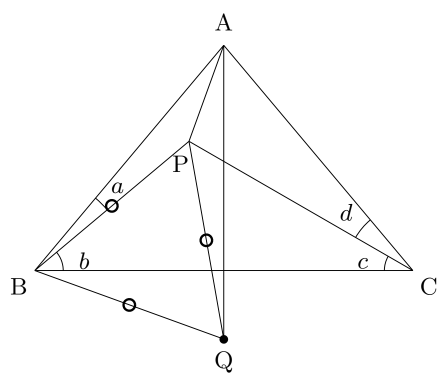
のとき，点 Q が直線 BP から見て点 A と反対側にくるように正三角形 BPQ を作ると，点 Q は $\triangle\mathrm{BCP}$ の外心で,

$\mathrm{AB} = \mathrm{AQ}$

が成り立ち

$\angle\mathrm{PAC} = \dfrac{3}{4}\angle\mathrm{BAC}$

である。

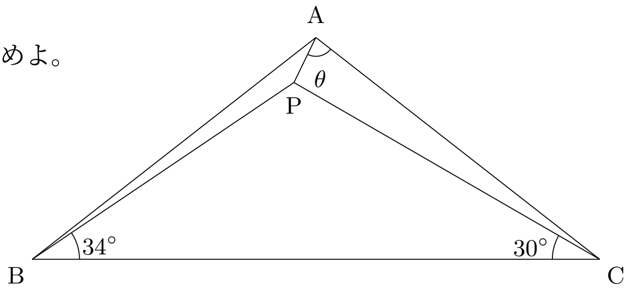


整角三角形 T(4,34,30,8)

$\boxed{\text{問}}$ $A = 104^\circ$ の二等辺三角形 ABC の内部に点 P を

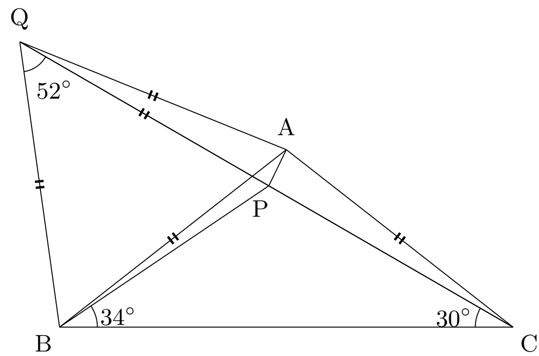
$\angle\mathrm{PBC} = 34^\circ,\ \angle\mathrm{PCB} = 30^\circ$

となるようにとるとき、$\angle\mathrm{PAC}$ の大きさを求めよ。



【求め方 2】No.47　T(10,40,30,20) と同じ方法

`http://www.himawarinet.ne.jp/~rinda/newpage79.html`



$\angle\mathrm{ABP} = 4^\circ,\ \angle\mathrm{ACP} = 8^\circ$

点 Q が直線 AB から見て点 C と反対側にくるように

正三角形 ABQ を作ると

$\angle\mathrm{CAQ} = 104^\circ + 60^\circ = 164^\circ$

AC = AQ より

$\angle\mathrm{ACQ} = \angle\mathrm{AQC} = \dfrac{1}{2}(180^\circ - 164^\circ) = 8^\circ = \angle\mathrm{ACP}$

よって，3 点 C, P, Q は同一直線上にある。

$\angle\mathrm{PBQ} = 60^\circ + 4^\circ = 64^\circ$

$\angle\mathrm{BPQ} = 34^\circ + 30^\circ = 64^\circ = \angle\mathrm{PBQ}$

よって，$\triangle\mathrm{QBP}$ は QB = QP の二等辺三角形である。

したがって，点 Q は $\triangle\mathrm{ABP}$ の外心である。

円周角の定理により

$$\angle\mathrm{PAB} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{PQB} = \frac{1}{2} \times (60^\circ - 8^\circ) = \frac{1}{2} \times 52^\circ = 26^\circ$$

$$\angle\mathrm{PAC} = 104^\circ - 26^\circ = \mathbf{78^\circ}$$

整角三角形 $T(a, b, c, d)$

一般に，AB = AC の二等辺三角形において

$b = a + 30^\circ,\ c = 30^\circ$

のとき，点 Q が直線 AB から見て点 C と反対側に

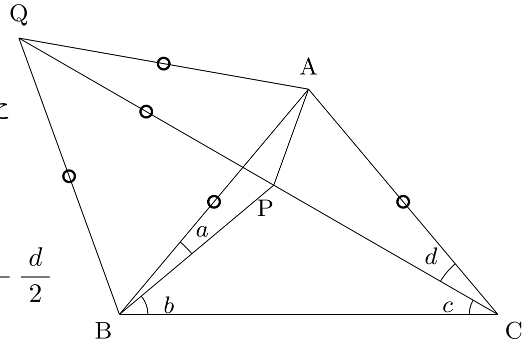
くるように正三角形 ABQ を作ると，

QA = QP = QB

が成り立ち，点 Q は $\triangle\mathrm{ABP}$ の外心となる。

$$\angle\mathrm{PAB} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{PQB} = 30^\circ - \frac{1}{2}\angle\mathrm{PQA} = 30^\circ - \frac{d}{2}$$

である。

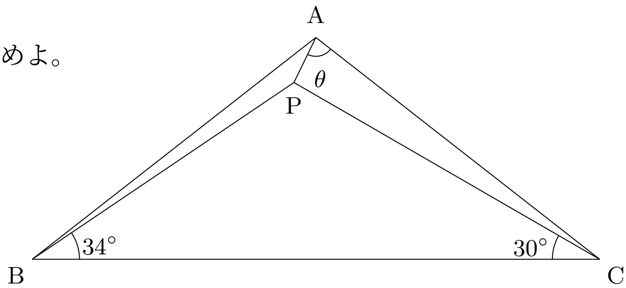


整角三角形 T(4,34,30,8)

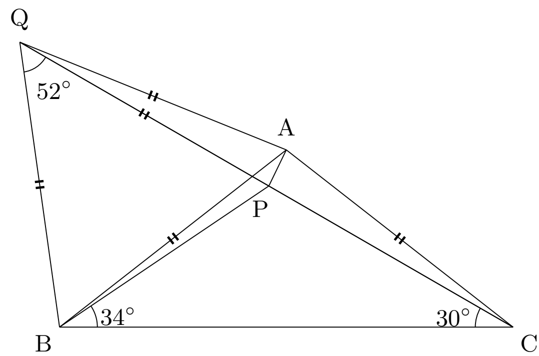
$\boxed{\text{問}}$ $A=104^\circ$ の二等辺三角形 ABC の内部に点 P を

$\angle \mathrm{PBC}=34^\circ$, $\angle \mathrm{PCB}=30^\circ$

となるようにとるとき、$\angle \mathrm{PAC}$ の大きさを求めよ。



【求め方 3】



$\angle \mathrm{ABP}=4^\circ$, $\angle \mathrm{ACP}=8^\circ$

線分 CP の延長線上に $\mathrm{AQ}=\mathrm{AC}$ となる点 Q をとると,

$\angle \mathrm{CAQ}=180^\circ-2\times 8^\circ=164^\circ$

$\angle \mathrm{BAQ}=164^\circ-104^\circ=60^\circ$

$\mathrm{AC}=\mathrm{AQ}$ より $\triangle \mathrm{ABQ}$ は正三角形である。

$\angle \mathrm{PBQ}=60^\circ+4^\circ=64^\circ$

$\angle \mathrm{BPQ}=34^\circ+30^\circ=64^\circ=\angle \mathrm{PBQ}$

よって, $\triangle \mathrm{QBP}$ は $\mathrm{QB}=\mathrm{QP}$ の二等辺三角形である。

$\mathrm{QA}=\mathrm{QP}=\mathrm{QB}$ より点 Q は $\triangle \mathrm{ABP}$ の外心である。

円周角の定理により

$$\angle \mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{PQB}=\frac{1}{2}\times(60^\circ-8^\circ)=\frac{1}{2}\times 52^\circ=26^\circ$$

$$\angle \mathrm{PAC}=104^\circ-26^\circ=\mathbf{78^\circ}$$

整角三角形 $T(a,b,c,d)$

一般に, $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ の二等辺三角形において

$b=a+30^\circ$, $c=30^\circ$

のとき, 線分 CP の延長線上に $\mathrm{AQ}=\mathrm{AC}$ となる点 Q をとると,

$\triangle \mathrm{ABQ}$ は正三角形で,

$\mathrm{QA}=\mathrm{QP}=\mathrm{QB}$

が成り立ち, 点 Q は $\triangle \mathrm{ABP}$ の外心となる。

$$\angle \mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{PQB}=30^\circ-\frac{1}{2}\angle \mathrm{PQA}=30^\circ-\frac{d}{2}$$

である。