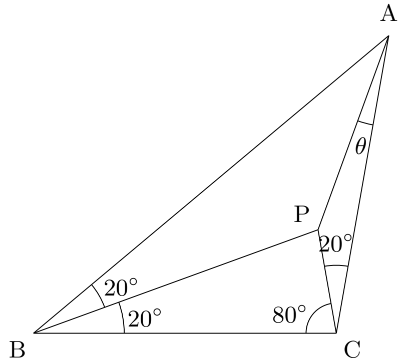
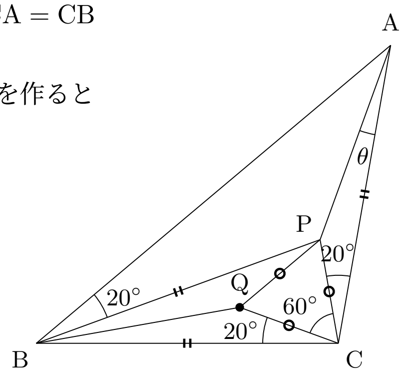
整角三角形 T(20,20,80,20)

問 $\triangle$ABC の内部に点 P を
$\angle \mathrm{PBA} = 20^\circ,\ \angle \mathrm{PBC} = 20^\circ,\ \angle \mathrm{PCB} = 80^\circ,\ \angle \mathrm{PCA} = 20^\circ$
となるようにとるとき、$\angle$PAC の大きさを求めよ。



$\angle \mathrm{CAB} = 180^\circ - (20^\circ + 20^\circ + 80^\circ + 20^\circ) = 40^\circ = \angle \mathrm{CBA}$ より CA = CB
$\angle \mathrm{BPC} = 180^\circ - (20^\circ + 80^\circ) = 80^\circ = \angle \mathrm{BCP}$ より BP = BC
図のように，$\triangle$BCP の内部に CP を一辺とする正三角形 CPQ を作ると
$\angle \mathrm{BCQ} = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ = \angle \mathrm{ACP}$
BC = AC, CQ = CP より $\triangle \mathrm{BCQ} \equiv \triangle \mathrm{ACP}$
したがって，$\angle \mathrm{PAC} = \angle \mathrm{QBC}$
また，3 辺相等より $\triangle \mathrm{BCQ} \equiv \triangle \mathrm{BPQ}$
ゆえに，$\angle \mathrm{QBC} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{PBC} = 10^\circ$
$\angle \mathrm{PAC} = \mathbf{10^\circ}$



【予備知識】
$2(a+b) + c + d = 180^\circ,\ b + 2c = 180^\circ$ ならば
$\triangle$CAB と $\triangle$BCP はそれぞれ CA = CB, BC = BP の二等辺三角形である。
さらに，$c = d + 60^\circ$ すなわち

$\boldsymbol{b = 60^\circ - 2a,\ c = a + 60^\circ,\ d = a,\ 0^\circ < a < 30^\circ}$ ならば

$\angle \mathrm{PAC} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{PBC} = \boldsymbol{\dfrac{b}{2} = 30^\circ - a}$

5° 単位では，次の 5 通り

a	b	c	d	x
5	50	65	5	25
10	40	70	10	20
15	30	75	15	15
20	20	80	20	10
25	10	85	25	5