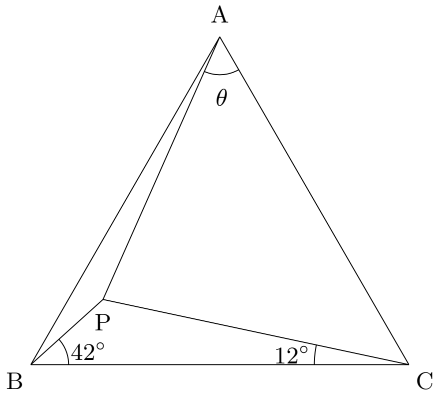
整角三角形 T(18,42,12,48)

$\boxed{\text{問}}$ 正三角形 ABC の内部に点 P を

$\angle PBC = 42^\circ$, $\angle PCB = 12^\circ$

となるようにとるとき、$\angle PAC$ の大きさを求めよ。



CP 上に $\angle CBQ = 12^\circ$ となるように点 Q をとり，

BQ を一辺とする正三角形の頂点を R とする。

$\angle PQB = 2\angle PCB = 24^\circ$ より，$\angle PQR = 60^\circ - 24^\circ = 36^\circ$

$QC = QR$ より $\angle QCR = \dfrac{1}{2}\angle PQR = 18^\circ$

$\angle BCR = 12^\circ + 18^\circ = 30^\circ$ より $\angle ACR = 30^\circ$

$\angle PBQ = 42^\circ - 12^\circ = 30^\circ$ より $\angle PBR = 30^\circ$

2 辺と夾角相等より

$\triangle CAR \equiv \triangle CBR$, $\triangle PBQ \equiv \triangle PBR$

$RA = RB$ より $\angle RAB = \angle RBA = 12^\circ$

$PR = PQ$ より $\angle PRQ = \angle PQR = 36^\circ$

$\angle RPQ = 180^\circ - 2 \times 36^\circ = 108^\circ$

$\angle RPQ + \angle RAC = 108^\circ + (12^\circ + 60^\circ) = 180^\circ$

よって，四角形 ARPC は円に内接する。

$\angle PAR = \angle PCR = 18^\circ$

$\angle PAB = \angle PAR - \angle RAB = 18^\circ - 12^\circ = 6^\circ$

$\angle PAC = 60^\circ - 6^\circ = \mathbf{54^\circ}$