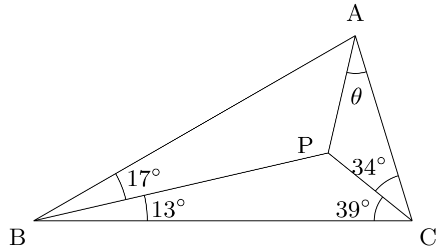
整角三角形 T(17,13,39,34)

$\boxed{\text{問}}$ $\triangle$ABC の内部に点 P を
$\angle \mathrm{PBA} = 17^\circ$, $\angle \mathrm{PBC} = 13^\circ$, $\angle \mathrm{PCB} = 39^\circ$, $\angle \mathrm{PCA} = 34^\circ$
となるようにとるとき、$\angle$PAC の大きさを求めよ。



$\triangle$ABC の外心を Q とすると，QA = QB = QC

$\angle \mathrm{AQC} = 2\angle \mathrm{ABC} = 60^\circ$

より，$\triangle$AQC は正三角形である。

$\angle \mathrm{BAC} = 180^\circ - (17^\circ + 13^\circ + 39^\circ + 34^\circ) = 77^\circ$

$\angle \mathrm{QBC} = \angle \mathrm{QCB} = 90^\circ - 77^\circ = 13^\circ$

$\angle \mathrm{PBC} = \angle \mathrm{QBC}$ より，外心 Q は線分 BP 上にある。

$\angle \mathrm{PQC} = 2 \times 13^\circ = 26^\circ$

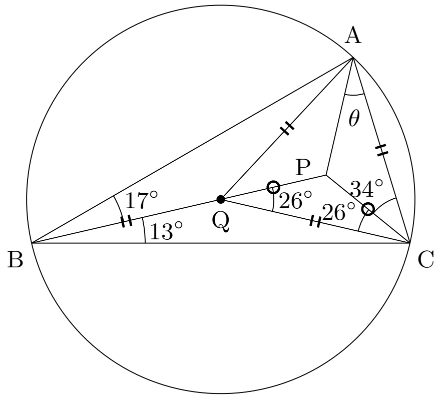
$\angle \mathrm{PCQ} = 39^\circ - 13^\circ = 26^\circ$

よって，$\triangle$PQC PQ = PC の二等辺三角形である。

3 辺相等より $\triangle \mathrm{AQP} \equiv \triangle \mathrm{ACP}$ である。

CP = CR, $\angle \mathrm{PCR} = 2\angle \mathrm{PCB} = 60^\circ$

$\angle \mathrm{PAC} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{QAC} = \mathbf{30^\circ}$



【予備知識】

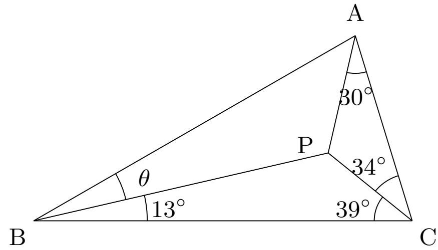
一般に，$a + b = 30^\circ$, $a + c + d = 90^\circ$ の関係が成り立つとき，

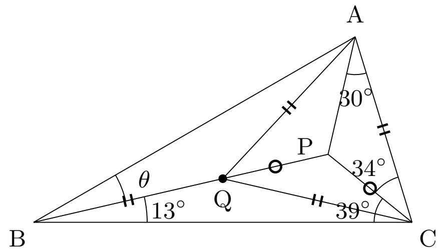
$\triangle$ABC の外心を Q は，直線 BP 上にある。

更に，$c = 3b$ ならば $\theta = 30^\circ$

整角三角形 T(17,13,39,34) の類題

$\boxed{\text{問}}$ $\triangle$ABC の内部に点 P を
$\angle\mathrm{PBC} = 13^\circ$, $\angle\mathrm{PCB} = 39^\circ$, $\angle\mathrm{PCA} = 34^\circ$, $\angle\mathrm{PAC} = 30^\circ$
となるようにとるとき、$\angle$PBA の大きさを求めよ。





$\angle\mathrm{APC} = 180^\circ - (30^\circ + 34^\circ) = 116^\circ$
$\angle\mathrm{BPC} = 180^\circ - (39^\circ + 13^\circ) = 128^\circ$
$\angle\mathrm{APB} = 360^\circ - (116^\circ + 128^\circ) = 116^\circ$
よって，$\angle\mathrm{APC} = \angle\mathrm{APB}$
辺 PB 上に PQ $=$ PC となる点 Q をとると
2 辺と夾角相等より $\triangle\mathrm{AQP} \equiv \triangle\mathrm{ACP}$ である。
ゆえに,

$\mathrm{AQ} = \mathrm{AC}$
$\angle\mathrm{QAP} = \angle\mathrm{CAP} = 30^\circ$
$\angle\mathrm{AQP} = \angle\mathrm{ACP} = 34^\circ$

$\angle\mathrm{QAC} = 2\angle\mathrm{QAP} = 60^\circ$ より，$\triangle$AQC は正三角形である。
$\mathrm{AQ} = \mathrm{CQ} \cdots$ ①
$\angle\mathrm{BCQ} = (39^\circ + 34^\circ) - 60^\circ) = 13^\circ = \angle\mathrm{CBQ}$
よって，$\triangle$QBC は $\mathrm{QB} = \mathrm{QC} \cdots$ ② の二等辺三角形である。
①, ② より $\triangle$QAB も二等辺三角形である。
$\angle\mathrm{PBA} = \angle\mathrm{QBA} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{AQP} = \mathbf{17^\circ}$