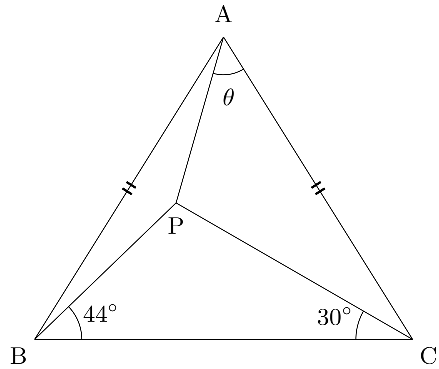
整角三角形 T(14,44,30,28)

$\boxed{\text{問}}$ $\mathrm{A} = 64^\circ$ の二等辺三角形 ABC の内部に点 P を

$\angle\mathrm{PBC} = 44^\circ$, $\angle\mathrm{PCB} = 30^\circ$

となるようにとるとき、$\angle\mathrm{PAC}$ の大きさを求めよ。



整角三角形 $T(4,34,30,8)$ の【求め方 1】と同じ方法。

$\angle\mathrm{ABP} = 14^\circ$, $\angle\mathrm{ACP} = 28^\circ$

$\triangle\mathrm{BCP}$ の外心を O とすると，$\angle\mathrm{BOP} = 2\angle\mathrm{BCP} = 60^\circ$ より

$\triangle\mathrm{BOP}$ は正三角形である。

三辺相等より

$\triangle\mathrm{ABO} \equiv \triangle\mathrm{ACO}$

$\angle\mathrm{BAO} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{BAC} = 32^\circ$

$\angle\mathrm{ABO} = 14^\circ + 60^\circ = 74^\circ$

$\angle\mathrm{AOB} = 180^\circ - (32^\circ + 74^\circ) = 74^\circ = \angle\mathrm{ABO}$

したがって，$\mathrm{AB} = \mathrm{AO}$

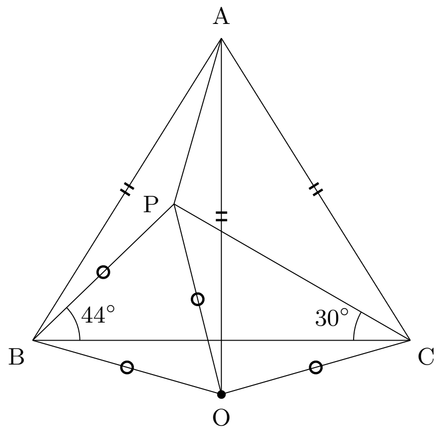
三辺相等より

$\triangle\mathrm{ABP} \equiv \triangle\mathrm{AOP}$

$\angle\mathrm{PAB} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{BAO} = 16^\circ$

$\angle\mathrm{PAC} = 64^\circ - 16^\circ = \mathbf{48^\circ}$

また，$\angle\mathrm{APC} = 180^\circ - (8^\circ + 78^\circ) = \mathbf{94^\circ}$



整角三角形 $T(a,b,c,d)$

一般に，$\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ の二等辺三角形において

$b = a + 30^\circ$, $c = 30^\circ$

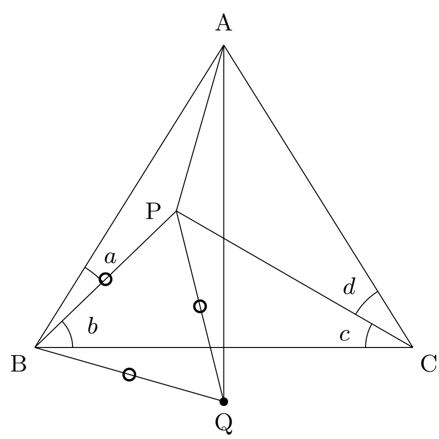
のとき，点 Q が直線 BP から見て点 A と反対側にくるように正三角形 BPQ を作ると，点 Q は $\triangle\mathrm{BCP}$ の外心で，

$\mathrm{AB} = \mathrm{AQ}$

が成り立ち

$\angle\mathrm{PAC} = \dfrac{3}{4}\angle\mathrm{BAC}$

である。

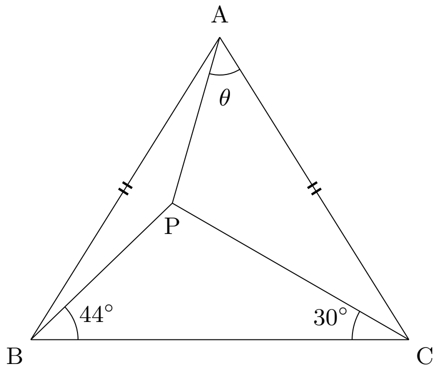


整角三角形 T(14,44,30,28)

$\boxed{問}$ $\mathrm{A}=64^\circ$ の二等辺三角形 ABC の内部に点 P を

$\angle\mathrm{PBC}=44^\circ$, $\angle\mathrm{PCB}=30^\circ$

となるようにとるとき、$\angle\mathrm{PAC}$ の大きさを求めよ。



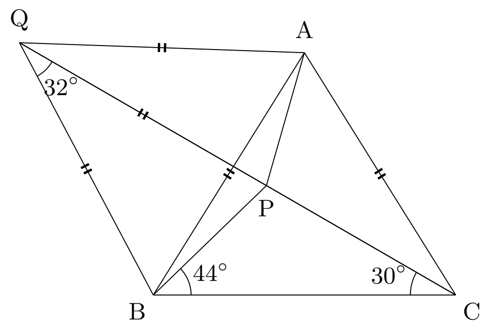
【求め方 2】No.47 T(10,40,30,20) と同じ方法

http://www.himawarinet.ne.jp/~rinda/newpage79.html

$\angle\mathrm{ABP}=14^\circ$, $\angle\mathrm{ACP}=28^\circ$

点 Q が直線 AB から見て点 C と反対側にくるように

正三角形 ABQ を作ると



$\angle\mathrm{CAQ}=64^\circ+60^\circ=124^\circ$

$\mathrm{AC}=\mathrm{AQ}$ より

$\angle\mathrm{ACQ}=\angle\mathrm{AQC}=\dfrac{1}{2}(180^\circ-124^\circ)=28^\circ=\angle\mathrm{ACP}$

よって，3 点 C, P, Q は同一直線上にある。

$\angle\mathrm{PBQ}=60^\circ+14^\circ=74^\circ$

$\angle\mathrm{BPQ}=44^\circ+30^\circ=74^\circ=\angle\mathrm{PBQ}$

よって，$\triangle\mathrm{QBP}$ は $\angle\mathrm{PQB}=32^\circ$, $\mathrm{QB}=\mathrm{QP}$ の二等辺三角形である。

したがって，点 Q は $\triangle\mathrm{ABP}$ の外心である。

円周角の定理により

$$\angle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{PQB}=\frac{1}{2}\times32^\circ=16^\circ$$

$$\angle\mathrm{PAC}=64^\circ-16^\circ=\mathbf{48^\circ}$$

整角三角形 $T(a,b,c,d)$

一般に，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ の二等辺三角形において

$b=a+30^\circ$, $c=30^\circ$

のとき，点 Q が直線 AB から見て点 C と反対側に

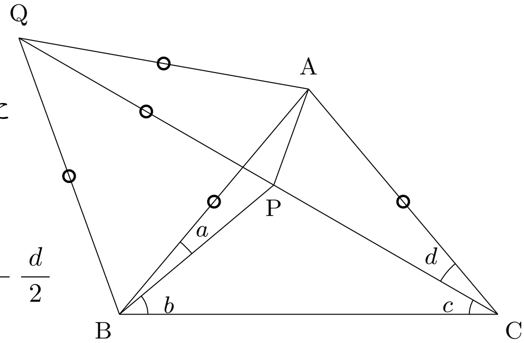
くるように正三角形 ABQ を作ると，

$\mathrm{QA}=\mathrm{QP}=\mathrm{QB}$

が成り立ち，点 Q は $\triangle\mathrm{ABP}$ の外心となる。

$$\angle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{PQB}=30^\circ-\frac{1}{2}\angle\mathrm{PQA}=30^\circ-\frac{d}{2}$$

である。

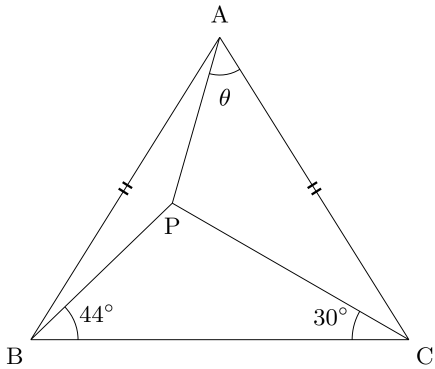


整角三角形 T(14,44,30,28)

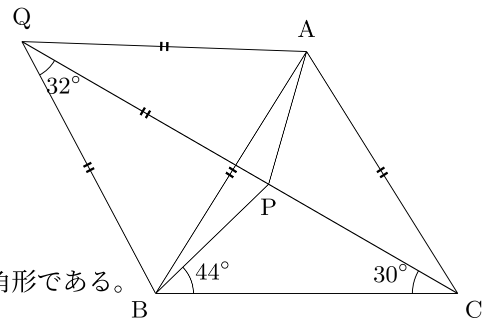
$\boxed{問}$ $\mathrm{A} = 64^\circ$ の二等辺三角形 ABC の内部に点 P を

$\angle\mathrm{PBC} = 44^\circ$, $\angle\mathrm{PCB} = 30^\circ$

となるようにとるとき、$\angle\mathrm{PAC}$ の大きさを求めよ。



【求め方 3】



$\angle\mathrm{ABP} = 14^\circ$, $\angle\mathrm{ACP} = 28^\circ$

線分 CP の延長線上に $\mathrm{AQ} = \mathrm{AC}$ となる点 Q をとると,

$\angle\mathrm{CAQ} = 180^\circ - 2 \times 28^\circ = 124^\circ$

$\angle\mathrm{BAQ} = 124^\circ - 64^\circ = 60^\circ$

$\mathrm{AC} = \mathrm{AQ}$ より $\triangle\mathrm{ABQ}$ は正三角形である。

$\angle\mathrm{PBQ} = 60^\circ + 14^\circ = 74^\circ$

$\angle\mathrm{BPQ} = 44^\circ + 30^\circ = 74^\circ = \angle\mathrm{PBQ}$

よって, $\triangle\mathrm{QBP}$ は $\angle\mathrm{PQB} = 32^\circ$, $\mathrm{QB} = \mathrm{QP}$ の二等辺三角形である。

$\mathrm{QA} = \mathrm{QP} = \mathrm{QB}$ より点 Q は $\triangle\mathrm{ABP}$ の外心である。

円周角の定理により

$$\angle\mathrm{PAB} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{PQB} = \frac{1}{2} \times 32^\circ = 16^\circ$$

$$\angle\mathrm{PAC} = 64^\circ - 16^\circ = \mathbf{48^\circ}$$

整角三角形 $T(a,b,c,d)$

一般に, $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ の二等辺三角形において

$b = a + 30^\circ$, $c = 30^\circ$

のとき, 線分 CP の延長線上に

$\mathrm{AQ} = \mathrm{AC}$

となる点 Q をとると, $\triangle\mathrm{ABQ}$ は正三角形で,

$\mathrm{QA} = \mathrm{QP} = \mathrm{QB}$

が成り立ち, 点 Q は $\triangle\mathrm{ABP}$ の外心となる。

$$\angle\mathrm{PAB} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{PQB} = 30^\circ - \frac{1}{2}\angle\mathrm{PQA} = 30^\circ - \frac{d}{2}$$

である。