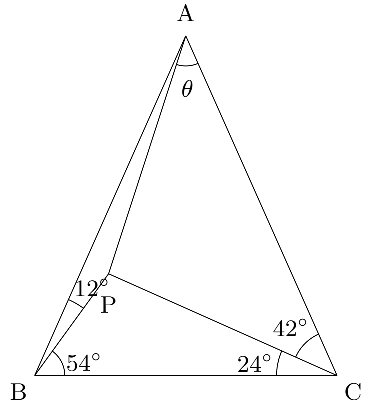
整角三角形 T(12,54,24,42)

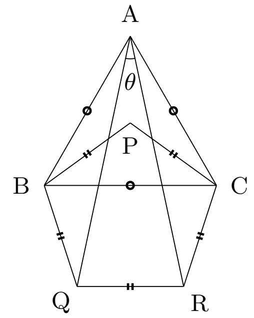
$\boxed{\text{問}}$ $\triangle\mathrm{ABC}$ の内部に点 P を
$\angle\mathrm{PBA}=12^\circ$, $\angle\mathrm{PBC}=54^\circ$, $\angle\mathrm{PCB}=24^\circ$, $\angle\mathrm{PCA}=42^\circ$
となるようにとるとき、$\angle\mathrm{PAC}$ の大きさを求めよ。



【準備】

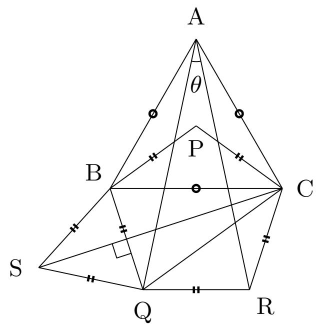
正三角形と正五角形が作る角度

三角形 ABC は正三角形で，五角形 PBQRC は正五角形である。
$\angle\mathrm{QAR}=24^\circ$ である。



【証明】

正三角形 BQS を BQ からみて点 C と反対側に作ると，
2 つの正三角形が点 B を共有しているから
2 辺夾角相等より，$\triangle\mathrm{ABQ}\equiv\triangle\mathrm{CBS}$
正三角形と正五角形は線分 SC に関して対称であるから，
線分 SC は $\angle\mathrm{BCQ}$ を二等分する。
$\angle\mathrm{BAQ}=\angle\mathrm{BCS}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{BCQ}=18^\circ$
$\angle\mathrm{QAR}=60^\circ-2\cdot18^\circ=\mathbf{24^\circ}$



【求め方】初等幾何

$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ACB}=66^\circ$ より $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$
$\triangle\mathrm{BCP}$ の外心を D とすると $\mathrm{DB}=\mathrm{DC}$ より $\triangle\mathrm{ABD}\equiv\triangle\mathrm{ACD}$
$\angle\mathrm{ACD}=66^\circ+12^\circ=78^\circ$, $\angle\mathrm{ADC}=90^\circ-12^\circ=78^\circ$ より
$\triangle\mathrm{ACD}$ は $\angle\mathrm{CAD}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{BAC}=24^\circ$, $\mathrm{AC}=\mathrm{AD}$ の二等辺三角形である。
$\mathrm{DP}=\mathrm{DC}$, $\angle\mathrm{PDC}=2\angle\mathrm{PBC}=108^\circ$ より
線分 CD, DP を隣り合う 2 辺とする
正五角形 CDPQR を作ることができる。
$\triangle\mathrm{QCD}$ は $\mathrm{QC}=\mathrm{QD}$ の二等辺三角形である。
線分 AQ は $\triangle\mathrm{ACD}$ と $\triangle\mathrm{QCD}$ の対称軸である。
正三角形 $\mathrm{A'PR}$ を PR からみて点 A と同じ側に作ると，$\boldsymbol{\angle\mathrm{CA'D}=24^\circ}$
線分 AQ は 正三角形 $\mathrm{A'PR}$ の対称軸であるから，点 A′ は点 A と一致する。
$\angle\mathrm{PAC}=\angle\mathrm{PAD}+\angle\mathrm{CAD}=18^\circ+24^\circ=\mathbf{42^\circ}$