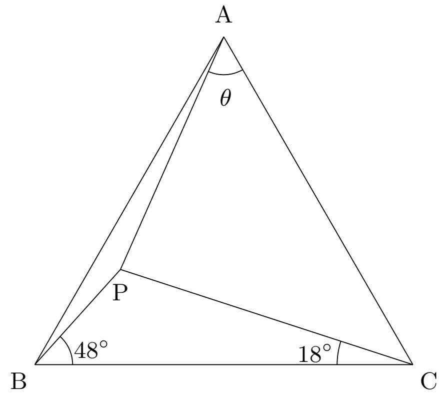
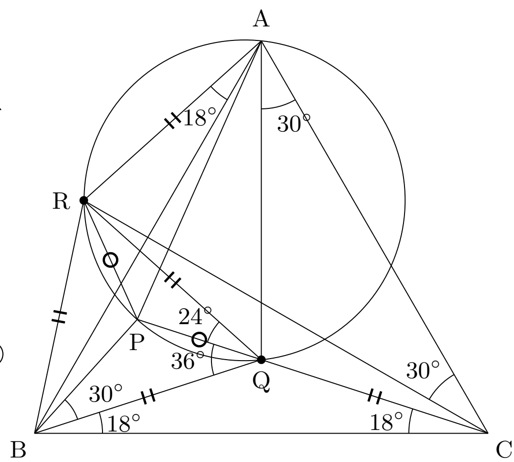
## 整角三角形 T(12,48,18,42)

問　正三角形 ABC の内部に点 P を
　　$\angle \mathrm{PBC} = 48^\circ$, $\angle \mathrm{PCB} = 18^\circ$
となるようにとるとき、$\angle \mathrm{PAC}$ の大きさを求めよ。




【求め方 1 】

CP 上に $\angle \mathrm{CBQ} = 18^\circ$ となるように点 Q をとると,
3 辺と夾角相等より $\triangle \mathrm{ABQ} \equiv \triangle \mathrm{ACQ}$
$\angle \mathrm{BAQ} = \angle \mathrm{CAQ} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{BAC} = 30^\circ$　　$\cdots\cdots$①
点 R が直線 AP から見て点 C と反対側にくるように正三角形 BQR を作ると
$\angle \mathrm{PQB} = 2\angle \mathrm{PCB} = 36^\circ$ より, $\angle \mathrm{PQR} = 60^\circ - 36^\circ = 24^\circ$
$\mathrm{QB} = \mathrm{QC} = \mathrm{QR}$ より点 Q は $\triangle \mathrm{BCR}$ の外心である。
$\angle \mathrm{BCR} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{BQR} = 30^\circ$, $\angle \mathrm{ACR} = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$
2 辺と夾角相等より $\triangle \mathrm{ACR} \equiv \triangle \mathrm{BCR}$
$\mathrm{RA} = \mathrm{RB}$ より $\angle \mathrm{RAB} = \angle \mathrm{RBA} = \angle \mathrm{QBC} = 18^\circ$　$\cdots\cdots$②
①, ② より $\angle \mathrm{RAQ} = 30^\circ + 18^\circ = 48^\circ$　　$\cdots\cdots$③
$\angle \mathrm{PBQ} = 48^\circ - 18^\circ = 30^\circ$, $\angle \mathrm{PBR} = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$
2 辺と夾角相等より $\triangle \mathrm{PBR} \equiv \triangle \mathrm{PBQ}$
$\mathrm{PR} = \mathrm{PQ}$ よって, $\angle \mathrm{RPQ} = 180^\circ - 2\times 24^\circ = 132^\circ$ $\cdots\cdots$④
③, ④ より
$\angle \mathrm{RAQ} + \angle \mathrm{RPQ} = 48^\circ + 132 = 180^\circ$
よって, 四角形 ARPQ は円に内接する。
$\angle \mathrm{PAR} = \angle \mathrm{PQR} = 24^\circ$
$\angle \mathrm{PAC} = \angle \mathrm{RAC} - \angle \mathrm{PAR} = (60^\circ + 18^\circ) - 24^\circ = \mathbf{54^\circ}$

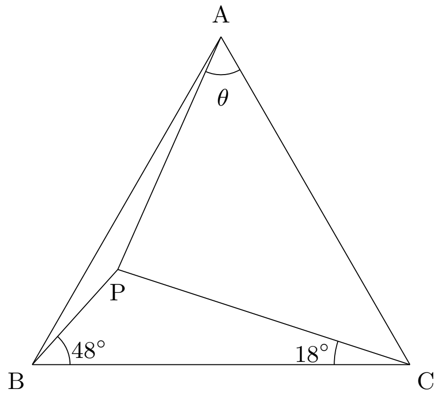


## 整角三角形 T(12,48,18,42)

$\boxed{\text{問}}$ 正三角形 ABC の内部に点 P を

$\angle \mathrm{PBC} = 48^\circ,\ \angle \mathrm{PCB} = 18^\circ$

となるようにとるとき、∠PAC の大きさを求めよ。




【求め方 2 】

CP 上に $\angle \mathrm{CBQ} = 18^\circ$ となるように点 Q をとり,

BQ を一辺とする正三角形の頂点を R とする。

二等辺三角形の対称性から $\angle \mathrm{QAC} = \angle \mathrm{QAC} = 30^\circ$

$\angle \mathrm{PQB} = 2\angle \mathrm{PCB} = 36^\circ$ より, $\angle \mathrm{PQR} = 60^\circ - 36^\circ = 24^\circ$

$\mathrm{QC} = \mathrm{QR}$ より $\angle \mathrm{QCR} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{PQR} = 12^\circ$

$\angle \mathrm{BCR} = 12^\circ + 18^\circ = 30^\circ$ より $\angle \mathrm{ACR} = 30^\circ$

$\angle \mathrm{PBQ} = 48^\circ - 18^\circ = 30^\circ$ より $\angle \mathrm{PBR} = 30^\circ$

2 辺と夾角相等より

$\triangle \mathrm{CAR} \equiv \triangle \mathrm{CBR},\ \triangle \mathrm{PBQ} \equiv \triangle \mathrm{PBR}$

$\mathrm{RA} = \mathrm{RB}$ より $\angle \mathrm{RAB} = \angle \mathrm{RBA} = 18^\circ$

$\mathrm{PR} = \mathrm{PQ}$ より $\angle \mathrm{PRQ} = \angle \mathrm{PQR} = 24^\circ$

$\angle \mathrm{RPQ} = 180^\circ - 2 \times 24^\circ = 132^\circ$

$\angle \mathrm{RPQ} + \angle \mathrm{RAQ} = 132^\circ + (30^\circ + 18^\circ) = 180^\circ$

よって，四角形 ARPQ は円に内接する。

$\angle \mathrm{RAQ} = \angle \mathrm{PRQ} = 24^\circ$

$\angle \mathrm{PAC} = \angle \mathrm{PAQ} + \angle \mathrm{QAC} = 24^\circ + 30^\circ = \mathbf{54^\circ}$