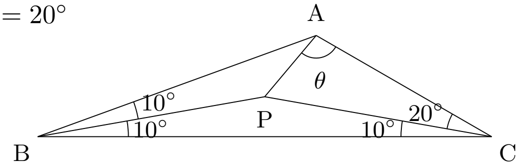
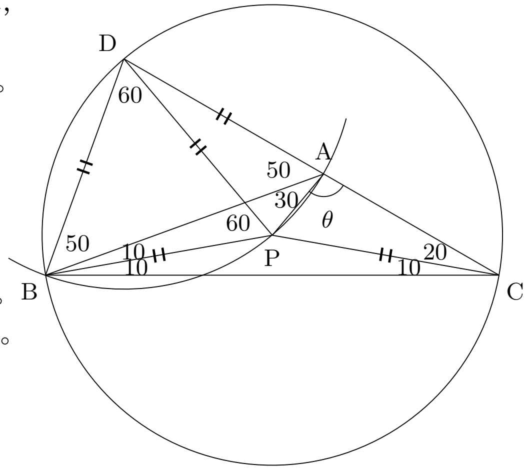
整角三角形 T(10,10,10,20)

$\boxed{問}$ △ABC の内部に点 P を
$\angle\mathrm{PBA}=10°,\ \angle\mathrm{PBC}=10°,\ \angle\mathrm{PCB}=10°,\ \angle\mathrm{PCA}=20°$
となるようにとるとき、∠PAC の大きさを求めよ。



図において，単位 (°) は省略する。
点 D が直線 BP から見て点 C と反対側にくるように，
正三角形 BPD を作る。
PB = PC = PD より，点 P は △BCD の外心である。
$\angle\mathrm{BCD}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{BPD}=\dfrac{1}{2}\cdot 60°=30°=\angle\mathrm{BCA}$
点 A は線分 CD 上にある。
$\angle\mathrm{DBA}=60°-10°=50°$
$\angle\mathrm{DAB}=10°+10°+10°+20°=50°$
よって，△DAB は DA = DB の二等辺三角形である。
DA = DB = DP より，点 D は △ABP の外心である。
$\angle\mathrm{BAP}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{BDP}=\dfrac{1}{2}\cdot 60°=30°$
$\angle\mathrm{PAC}=180°-(50°+30°)=\mathbf{100°}$



【予備知識】$a+b+c+d=60°-a,\ b=c,\ c+d=30°$
つまり，$2a+b=30°,\ c=b,\ d=2a$ のとき
点 D が直線 BP から見て点 C と反対側にくるように，
正三角形 BPD を作ると，点 A は線分 CD 上にある。
また，点 D は △ABP の外心であるから
$\angle\mathrm{BAP}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{BDP}=\dfrac{1}{2}\cdot 60°=30°$
よって，
$\angle\mathrm{PAC}=180°-\{(60°-a)+30°\}=\boldsymbol{a+90°}$
$(a,\ b,\ c,\ d,\ e)=(5,\ 20,\ 20,\ 10,\ 95),\ (10,\ 10,\ 10,\ 20,\ 100)$