外円に一点から二本の弦を引いて，甲円を 3 個容れ相等しくなるようにする

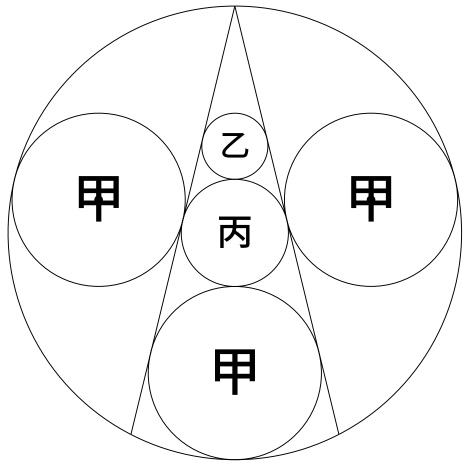
外円に一点から二本の弦を引いて，甲円を 3 個容れ相等しくなるようにする。そして丙，乙と内接円を作ると，

$$\textbf{乙} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \times \textbf{甲}$$

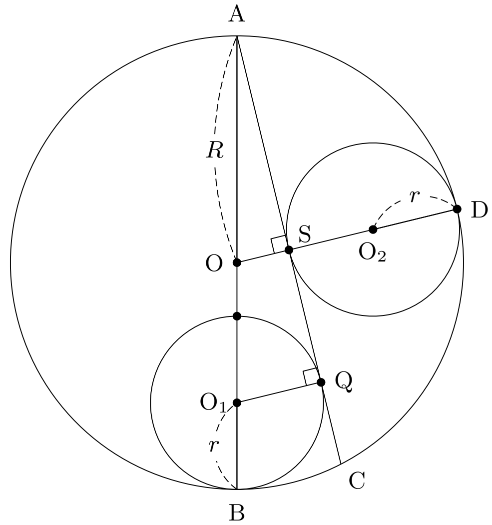
が成り立つ。

黄金比 は $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ であり，$\dfrac{1}{\varphi^2} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ より

$$\textbf{甲} = \varphi^2 \times \textbf{乙}$$



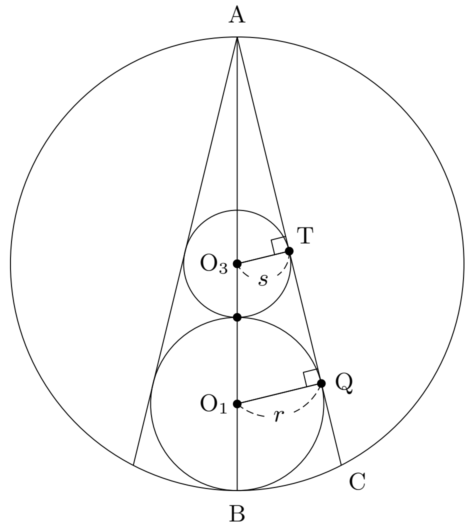
(学術を中心とした和算史上の人々 p.172 より)



直径を AB とする。大円の中心を O , 甲円の中心を O_1, O_2 としする。
弦を AC とし，甲円 O_1, O_2 との接点を Q, S とする。
大円と甲円 O_2 との接点を D とする。
大円の半径を R , 甲円の半径を r とすると
$AO_1 = 2R - r,\ OS = R - 2r$
$OS \mathbin{/\!/} O_1Q$ だから

$$R : (R-2r) = (2R-r) : r$$

$r < R$ より $r = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}R,\ R = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}r$



丙円の中心を O_3 とし，半径を s とする。
弦 AC と丙円 O_3 との接点を T とする。
$AO_3 = 2R - 2r - s,\ O_3T = s$
$(2R-2r-s) : s = (2R-r) : r$ より $s = \dfrac{r(R-r)}{R}$

$\dfrac{r}{R} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\ R - r = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}r - r = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}r$ より

$$s = \frac{r(R-r)}{R} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}r = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}r = \varphi r$$

乙円の半径を t とすると，乙円と丙円の関係は，丙円と甲円の関係と同じだから

$$t = \varphi s = \varphi \cdot \varphi r = \varphi^2 r$$

$$\begin{aligned} BO_3 = 2r + s &= 2r + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}r \\ &= \frac{3+\sqrt{5}}{2}r \\ &= \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2}R = R \end{aligned}$$

したがって，大円の中心と丙円の中心は一致する。よって 2 点 S, T も一致する。