隣接 2 項間の漸化式と三角関数

すべての自然数 n について，$a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ を満たしているとする。

(1) $a_n=2\sin\theta_n$ $\left(0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく。θ_1 の値を求め，数列 $\{\theta_n\}$ の漸化式を導け。

(2) (1) で与えられた数列 $\{\theta_n\}$ の一般項を求めよ。(類　東京大 (1975)　河合塾　ハイレベル理系数学 50)

【解答】

(1) $a_1=\sqrt{2}$ であるから $2\sin\theta_1=\sqrt{2}$ 　　$\sin\theta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0<\theta_1<\dfrac{\pi}{2}$ より $\boldsymbol{\theta_1=\dfrac{\pi}{4}}$

$a_n=2\sin\theta_n$ と $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ から

$$\begin{aligned}
2\sin\theta_{n+1}&=\sqrt{2+2\sin\theta_n}=\sqrt{2(1+\sin\theta_n)}\\
&=\sqrt{2\left\{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_n\right)\right\}}=2\sqrt{\cos^2\frac{\frac{\pi}{2}-\theta_n}{2}} \qquad ☜\ \boldsymbol{\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}}\\
&=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_n}{2}\right) \qquad \left(\because 0<\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_n}{2}<\frac{\pi}{4}\right)\\
&=2\sin\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_n}{2}\right)\right\}=2\sin\left(\frac{\theta_n}{2}+\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

$0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\theta_{n+1}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\boldsymbol{\theta_{n+1}=\frac{\theta_n}{2}+\frac{\pi}{4}}$$

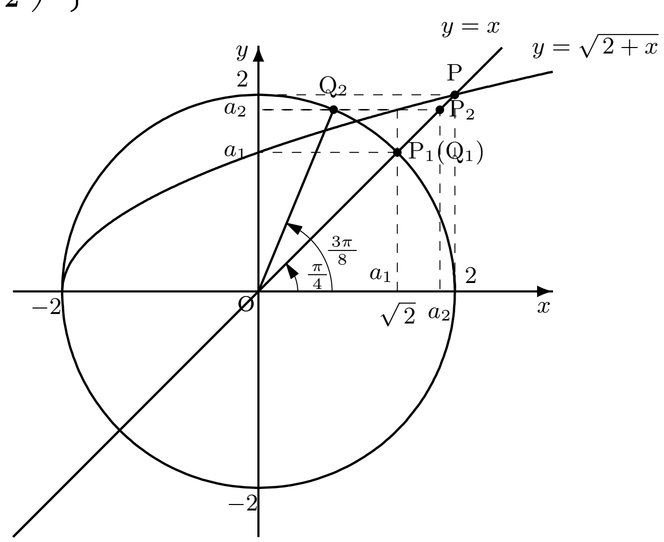
(2) (1) より

$\theta_{n+1}-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\theta_n-\dfrac{\pi}{2}\right)$ と変形できる。

$$\theta_n-\frac{\pi}{2}=\left(\theta_1-\frac{\pi}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$\therefore\ \theta_n=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}$$

2 つのグラフ $y=\sqrt{2+x}$, $y=x$ を利用して，
右の図のように，$a_1=\sqrt{2}$ から
　a_2, a_3, $\cdots\cdots$
が順に求められ，数列 $\{a_n\}$ の極限値 $\mathbf{2}$ は
2 つのグラフの交点 P の x 座標で表される。
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\mathbf{2}$
したがって
$\boldsymbol{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}=2}$



別解

$$\begin{aligned}
(a_{n+1})^2&=2+a_n\\
4\sin^2\theta_{n+1}&=2+2\sin\theta_n\\
4\cdot\frac{1-\cos 2\theta_{n+1}}{2}&=2(1+\sin\theta_n)\\
\cos 2\theta_{n+1}&=-\sin\theta_n=\cos\left(\theta_n+\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

$0<2\theta_{n+1}<\pi$, $\dfrac{\pi}{2}<\theta_n+\dfrac{\pi}{2}<\pi$ であるから

$$2\theta_{n+1}=\theta_n+\frac{\pi}{2}$$

$$\boldsymbol{\theta_{n+1}=\frac{\theta_n}{2}+\frac{\pi}{4}}$$

隣接 2 項間の漸化式と三角関数

すべての自然数 n について，$a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ を満たしているとする。
このとき，$a_n=2\sin\theta_n$ $\left(0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と表せることを証明し，θ_n を求めよ。

【証明】

[1] $n=1$ のとき，$a_1=\sqrt{2}=2\sin\dfrac{\pi}{4}$ であるから
よって，$\theta_1=\dfrac{\pi}{4}$ とすると，$0<\theta_1<\dfrac{\pi}{2}$ で $a_1=2\sin\theta_1$ と表せる。

[2] $n=k$ のとき，$a_k=2\sin\theta_k$ $\left(0<\theta_k<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と表せると仮定すると

$$\begin{aligned}
a_{k+1}&=\sqrt{2+a_k}=\sqrt{2+2\sin\theta_k}=\sqrt{2(1+\sin\theta_k)}\\
&=\sqrt{2\left\{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_k\right)\right\}}=2\sqrt{\cos^2\frac{\frac{\pi}{2}-\theta_k}{2}} \qquad ☜\ \boldsymbol{\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}}\\
&=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_k}{2}\right)=2\sin\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_k}{2}\right)\right\}\\
&=2\sin\left(\frac{\theta_k}{2}+\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

$\theta_{k+1}=\dfrac{\theta_k}{2}+\dfrac{\pi}{4}$ とすると, $0<\theta_{k+1}<\dfrac{\pi}{2}$で

$a_{k+1}=2\sin\theta_{k+1}$と表せる。

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ。
[1], [2] より すべての自然数 n に対して $a_n=2\sin\theta_n$ $\left(0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と表せる。

$\theta_{n+1}-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\theta_n-\dfrac{\pi}{2}\right)$ と変形できるから

$$\theta_n=\left(\theta_1-\frac{\pi}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{\pi}{2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}$$