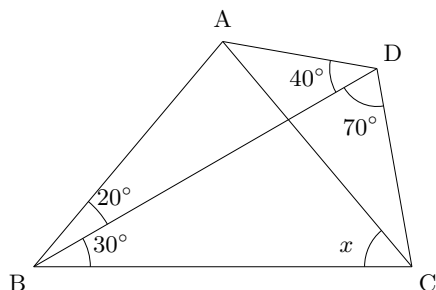


【整角四角形B型 $QB(20, 30, 70, 40)$ 】

図の x の角度を求めよ。



【解答】

図において、単位 ($^{\circ}$) は省略する。

辺 BD の点 D の方向への延長線上に $AF = AB$ となる点 F をとると

$\angle DAF = 40^{\circ} - 20^{\circ} = 20^{\circ} = \angle DFA$ より $DA = DF$

$\angle CDA = 40^{\circ} + 70^{\circ} = 110^{\circ}$

$\angle CDF = 180^{\circ} - 70^{\circ} = 110^{\circ} = \angle CDA$

CD が共通だから $\triangle CDA \equiv \triangle CDF$

よって $CA = CF \dots\dots ①$

$\triangle BCF$ の外心を G とすると $GB = GC = GF$,

$\angle CGF = 2\angle CBF = 60^{\circ}$

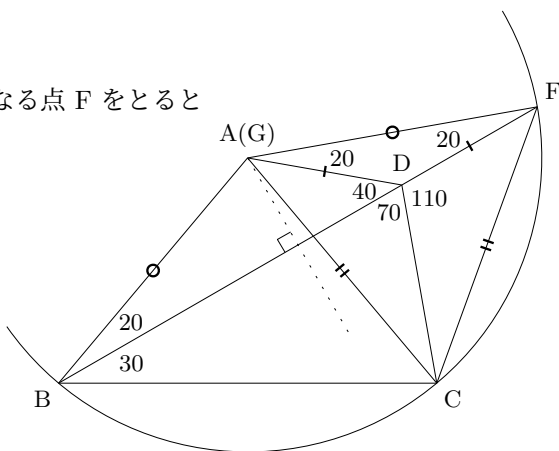
より $\triangle CGF$ は正三角形である。

$CG = CF \dots\dots ②$

①, ② より $CA = CG$

2 点 A, G は線分 BF の垂直二等分線上にあり、線分 BF に関して同じ側にあるから、一致する。

$AB = AC$ であるから $x = \angle ABC = 20^{\circ} + 30^{\circ} = 50^{\circ}$

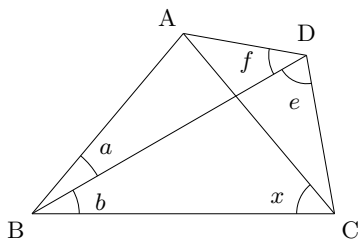


【予備知識】

$b = 30^{\circ}$, $f = 2a$, $a + e = 90^{\circ}$ のとき

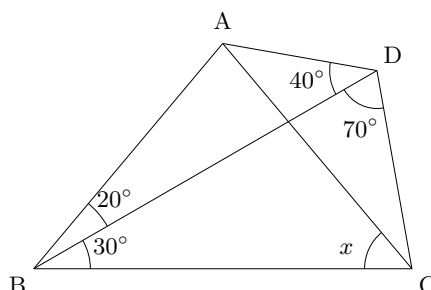
$AB = AC$ より $x = a + b$ ただし, $a < 45^{\circ}$

a	b	e	f	x	a	b	e	f	x
5	30	85	10	35	25	30	65	50	55
10	30	80	20	40	30	30	60	60	60
15	30	75	30	45	35	30	55	70	65
20	30	70	40	50	40	30	50	80	70



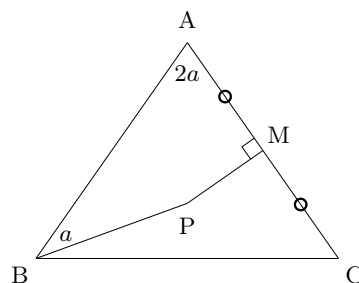
【整角四角形B型 $QB(20, 30, 70, 40)$ 】

図の x の角度を求めよ。



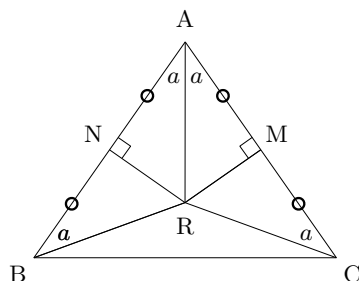
【定理】スウガクとく Gauss より

$\triangle ABC$ 正三角形でない, $AB = AC$ の二等辺三角形で、
 点 P が辺 AC の垂直二等分線上にある
 すなわち, $AM = MC$, $AC \perp PM$
 かつ $\angle ABP = \frac{1}{2} \angle BAC$
 を満たすならば, 点 P は頂角 A の二等分線上にある。



【証明】

$\angle BAC = 2a$, AC と AB の中点をそれぞれ M, N とし,
 AC と AB の垂直二等分線の交点を R とする。
 対称性より, $\triangle RAB$ は底角 a の二等辺三角形
 よって, 点 R と点 P は一致するので, 点 P は頂角 A の
 二等分線上にある。



【解答】 図において, 単位 ($^\circ$) は省略する。

$\triangle BCD$ の外心を F とすると $FB = FC = FD$,

$\angle CFD = 2\angle CBD = 60^\circ$

より $\triangle CFD$ は正三角形である。

$\triangle ABF$ を線分 AB に関して折り返し, 点 F が移った点を G とすると, $\angle FBG = 2\angle ABF = 60^\circ$

より $\triangle FBG$ は正三角形で, 線分 AB は辺 FG の垂直二等分線である。

$\triangle DFG$ は $FD = FG$ の二等辺三角形で,

$\angle DFG = 360^\circ - (60^\circ + 2 \cdot 70^\circ + 60^\circ) = 100^\circ$

$\angle ADF = 40^\circ + 10^\circ = 50^\circ = \frac{1}{2} \angle DFG$

定理より, 線分 AF は $\angle DFG$ の二等分線である。

$\angle AFD = \angle ADF = 50^\circ$ より $AF = AD$

四角形 $AFCD$ はたこ形で, 線分 AC はその対称軸である。

$x = 20^\circ + 30^\circ = 50^\circ$

