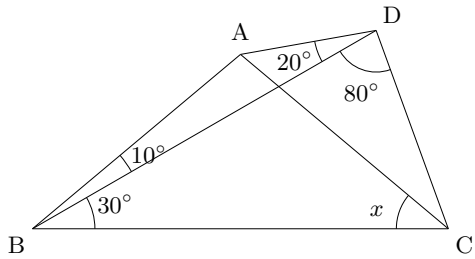
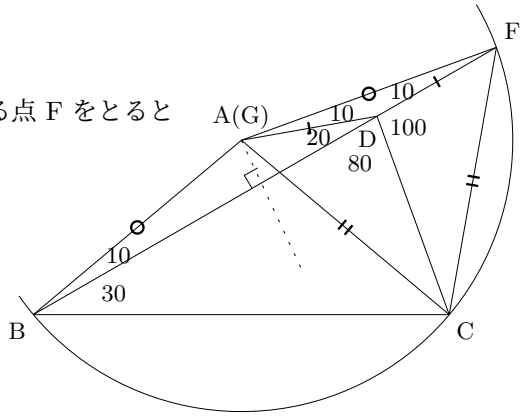
**【整角四角形Ｂ型 $QB(10,\ 30,\ 80,\ 20)$】**

図の $x$ の角度を求めよ。




【解答】

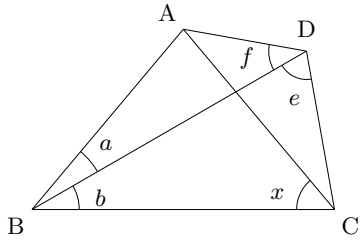
図において，単位 (°) は省略する。




辺 BD の点 D の方向への延長線上に AF = AB となる点 F をとると
∠DAF = 20° − 10° = 10° = ∠DFA より DA = DF
∠CDA = 20° + 80° = 100°
∠CDF = 180° − 80° = 100° = ∠CDA
CD が共通だから △CDA ≡ △CDF
よって CA = CF ·····①
△BCF の外心を G とすると GB = GC = GF,
∠CGF = 2∠CBF = 60°
より △CGF は正三角形である。
CG = CF ·····②
①, ② より CA = CG
2 点 A, G は線分 BF の垂直二等分線上にあり，線分 BF に関して同じ側にあるから，**一致する**。
AB = AC であるから $x$ = ∠ABC = 10° + 30° = **40°**

【予備知識】

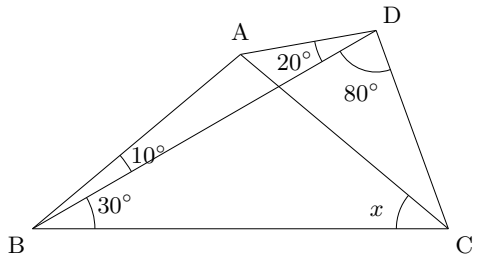
$b = 30°,\ f = 2a,\ a + e = 90°$ のとき
AB = AC より $\boldsymbol{x = a + b}$ ただし，$a < 45°$




| $a$ | $b$ | $e$ | $f$ | $x$ | $a$ | $b$ | $e$ | $f$ | $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 30 | 85 | 10 | 35 | 25 | 30 | 65 | 50 | 55 |
| 10 | 30 | 80 | 20 | 40 | 30 | 30 | 60 | 60 | 60 |
| 15 | 30 | 75 | 30 | 45 | 35 | 30 | 55 | 70 | 65 |
| 20 | 30 | 70 | 40 | 50 | 40 | 30 | 50 | 80 | 70 |

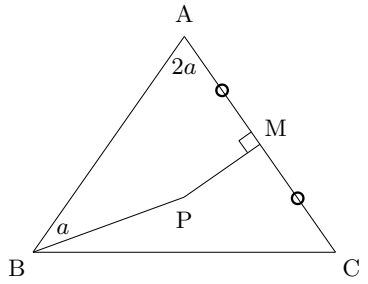
**【整角四角形Ｂ型 $QB(10,\ 30,\ 80,\ 20)$】**

図の $x$ の角度を求めよ。



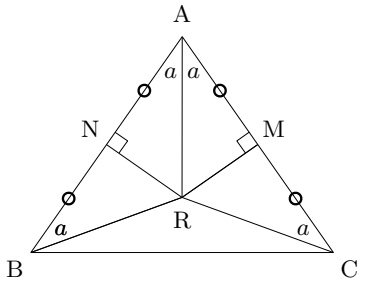

**【定理】スウガクとくガウスより**

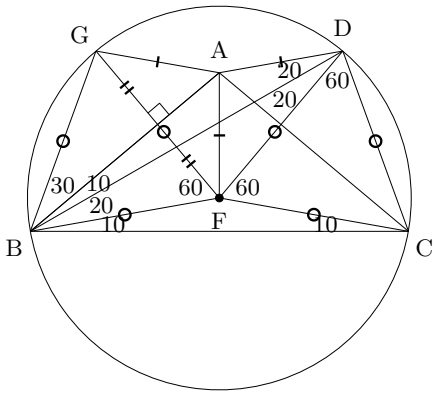
△ABC 正三角形でない，AB = AC の二等辺三角形で、
点 P が辺 AC の垂直二等分線上にある
すなわち，AM = MC, AC ⊥ PM
かつ $\angle ABP = \frac{1}{2}\angle BAC$
を満たすならば，点 P は頂角 A の二等分線上にある。




【証明】

$\angle BAC = 2a$ ，AC と AB の中点をそれぞれ M, N とし，
AC と AB の垂直二等分線の交点を R とする。
対称性より，△RAB は底角 $a$ の二等辺三角形
よって，点 R と点 P は一致するので，点 P は頂角 A の
二等分線上にある。




【解答】 図において，単位 (°) は省略する。

△BCD の外心を F とすると FB = FC = FD,
$\angle CFD = 2\angle CBD = 60°$
より △CFD は正三角形である。
△ABF を線分 AB に関して折り返し，点 F が移った点を G
とすると，$\angle FBG = 2\angle ABF = 60°$
より △FBG は正三角形で，線分 AB は辺 FG の垂直二等分
線である。
△DFG は FD = FG の二等辺三角形で，
$\angle DFG = 360° - (60° + 2 \cdot 80° + 60°) = 80°$
$\angle ADF = 20° + 20° = 40° = \frac{1}{2}\angle DFG$
**定理**より，線分 AF は ∠DFG の二等分線である。
∠AFD = ∠ADF = 40° より AF = AD
四角形 AFCD はたこ形で，線分 AC はその対称軸である。
$x = 10° + 30° = \mathbf{40°}$