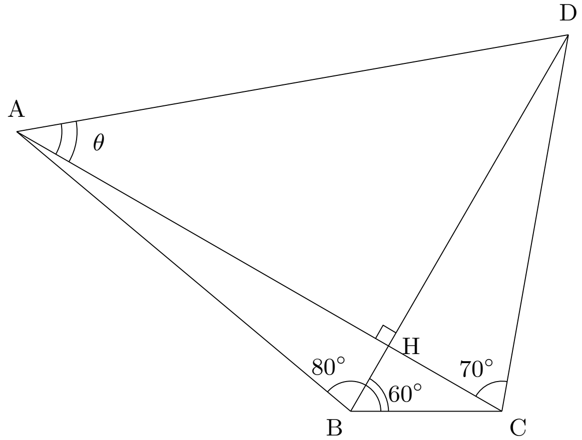
【整角４角形 $Q(70,\ 30,\ 60,\ 80)$】

次の図で $\angle\mathrm{CAD}$ を求めよ。



【三角関数利用】

公　式

$\boldsymbol{\tan 3\theta = \tan(60^\circ+\theta)\tan(60^\circ-\theta)\tan\theta}$ ……①

$\tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}$ を用いれば

$\boldsymbol{\tan\theta = \tan(30^\circ+\theta)\tan(30^\circ-\theta)\tan 3\theta}$ ……②

① において $\theta=10^\circ$ とすれば，　$\boldsymbol{\tan 30^\circ\tan 80^\circ = \tan 70^\circ\tan 50^\circ}$

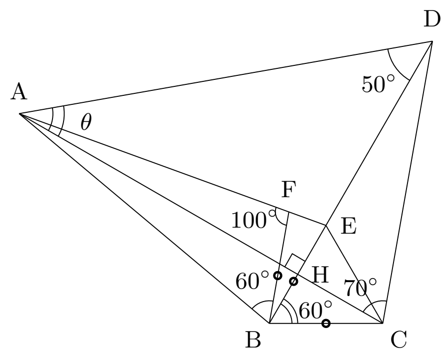
② において $\theta=10^\circ$ とすれば，　$\boldsymbol{\tan 10^\circ\tan 60^\circ = \tan 20^\circ\tan 40^\circ}$

さらに，　$\boldsymbol{\tan 10^\circ\tan 70^\circ = \tan 30^\circ\tan 40^\circ}$ ，　$\boldsymbol{\tan 10^\circ\tan 50^\circ = \tan 20^\circ\tan 30^\circ}$

$\tan\theta=\dfrac{\mathrm{DH}}{\mathrm{AH}},\ \tan 10^\circ=\dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{AH}},\qquad \tan 30^\circ=\dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{CH}},\ \tan 70^\circ=\dfrac{\mathrm{DH}}{\mathrm{CH}}$

$\therefore \tan\theta\tan 30^\circ=\tan 10^\circ\tan 70^\circ$ よって $\boldsymbol{\theta=40^\circ}$

【初等幾何１】$30^\circ+70^\circ+80^\circ=180^\circ$ が決め手。



図のように $\triangle\mathrm{ABC}$ を辺 AC で折り返すと，点 B は対角線 BD 上の点 E に移り，

$\triangle\mathrm{ABC}\equiv\triangle\mathrm{AEC}$

である。また，$\triangle\mathrm{ABE}$ は $\mathrm{AB}=\mathrm{AE}$ の二等辺三角形で，$\triangle\mathrm{BCE}$ は正三角形となる。

線分 AE 上に $\mathrm{BE}=\mathrm{BF}$ となるように点 F をとると，

$\triangle\mathrm{BEF}\backsim\triangle\mathrm{AEB}$

となる。よって，$\triangle\mathrm{ABF}$ と $\triangle\mathrm{DBC}$ において，

$\mathrm{BF}=\mathrm{BC}$

$\angle\mathrm{ABF}=\angle\mathrm{DBC}=60^\circ$

$\angle\mathrm{AFB}=\angle\mathrm{DCB}=100^\circ$

より，

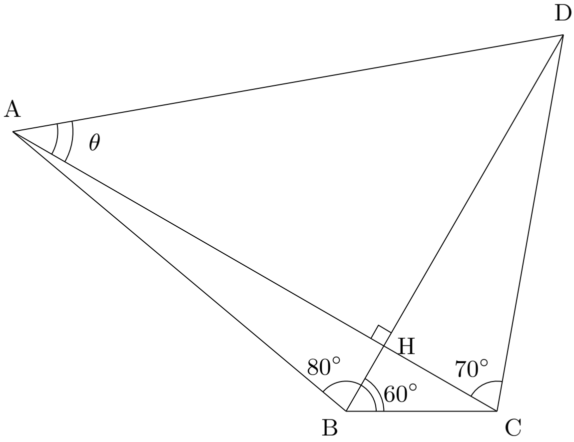
$\triangle\mathrm{ABF}\equiv\triangle\mathrm{DBC}$ 。ゆえに $\mathrm{AB}=\mathrm{DB}$

したがって，$\triangle\mathrm{BAD}$ は二等辺三角形なので，

$\theta+10^\circ=\angle\mathrm{BAD}=50^\circ$　　$\therefore \boldsymbol{\theta=40^\circ}$

【整角４角形 $Q(70,\ 30,\ 60,\ 80)$】

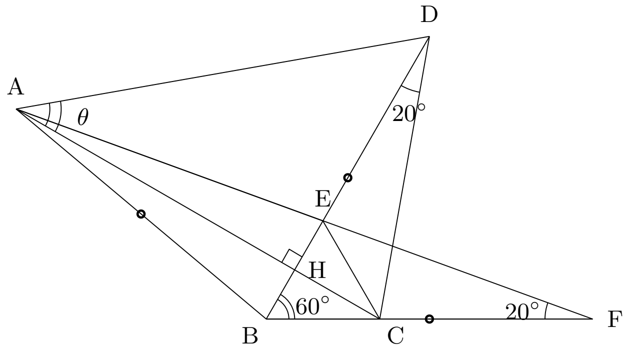
次の図で $\angle\mathrm{CAD}$ を求めよ。



【初等幾何 2 】

図のように $\triangle\mathrm{ABC}$ を辺 AC で折り返すと，点 B は対角線 BD 上の点 E に移る。

AE の延長線と BC の延長線の交点を F とする。



$\angle\mathrm{BAF}=20^\circ$，$\angle\mathrm{FBA}=140^\circ$ より $\angle\mathrm{BFA}=20^\circ$

$\angle\mathrm{BAF}=\angle\mathrm{BFA}$ より $\triangle\mathrm{BAF}$ は二等辺三角形

ゆえに $\mathrm{BA}=\mathrm{BF}\cdots\cdots$①

$\triangle\mathrm{BEC}$ は正三角形なので，$\mathrm{BC}=\mathrm{BE}$

$\angle\mathrm{BDC}=90^\circ-70^\circ=20^\circ=\angle\mathrm{BFE}$

$\angle\mathrm{DCB}=\angle\mathrm{FEB}=100^\circ$

よって $\triangle\mathrm{DBC}\equiv\triangle\mathrm{FBE}$ （1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい）

ゆえに $\mathrm{BD}=\mathrm{BF}\cdots\cdots$①

①，② より $\mathrm{BA}=\mathrm{BD}$

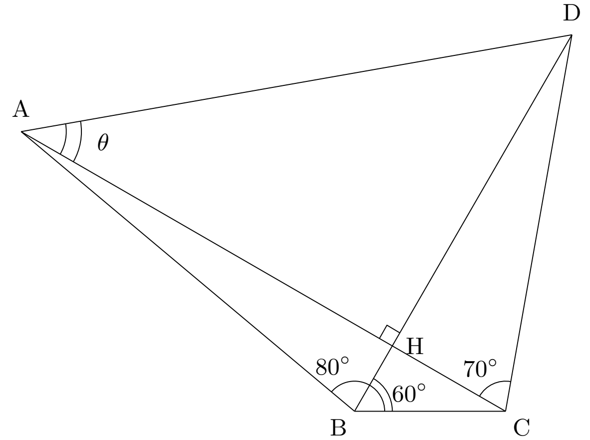
よって，$\triangle\mathrm{BAD}$ は二等辺三角形

$\angle\mathrm{ABD}=80^\circ$ なので，$\angle\mathrm{BAD}=50^\circ$

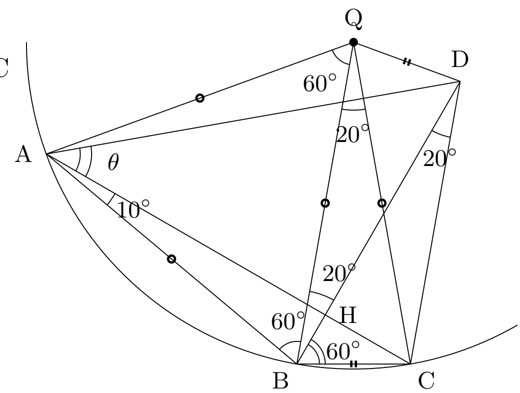
ゆえに $\theta=50^\circ-10^\circ=\mathbf{40^\circ}$

【整角４角形 $Q(70,\ 30,\ 60,\ 80)$】

次の図で $\angle\mathrm{CAD}$ を求めよ。



【初等幾何 3 】



$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の中心を Q とすると，$\mathrm{QA} = \mathrm{QB} = \mathrm{QC}$

$\angle\mathrm{AQB} = 2\angle\mathrm{ACB} = 60^\circ$，$\angle\mathrm{BQC} = 2\angle\mathrm{BAC} = 20^\circ$

より $\triangle\mathrm{QAB}$ は正三角形。

$\angle\mathrm{QBD} = \angle\mathrm{ABD} - \angle\mathrm{ABQ} = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ = \angle\mathrm{BDC}$

よって $\mathrm{BQ} /\!/ \mathrm{CD}$

また，$\angle\mathrm{QBD} = \angle\mathrm{BQC} = 20^\circ$ より

四角形 BCDQ は等脚台形である。

$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{AQD}$ は

$\mathrm{AB} = \mathrm{AQ}$，$\mathrm{BC} = \mathrm{QD}$，$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{AQD}$

より $\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{AQD}$

$\angle\mathrm{QAD} = \angle\mathrm{BAC} = 10^\circ$

ゆえに $\theta = 60^\circ - 2 \times 10^\circ = \mathbf{40^\circ}$