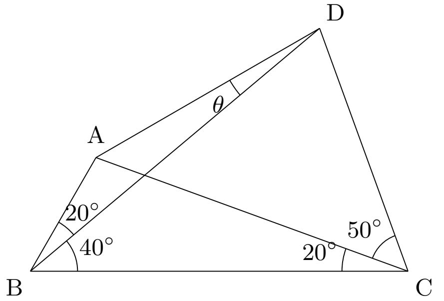
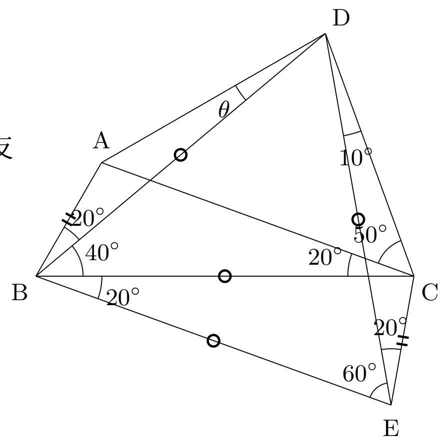
【整角四角形 $Q(20,\ 40,\ 20,\ 50)$】

図の θ の角度を求めよ。



【解答】



$\angle\mathrm{BCD} = \angle\mathrm{BDC} = 70^\circ$ より $\triangle\mathrm{BCD}$ は $\mathrm{BC} = \mathrm{BD}$ の二等辺三角形である。

図のように，辺 BD を一辺とする正三角形 BDE を点 A とは反対側に作る。

$\angle\mathrm{CBE} = 60^\circ - 40^\circ = 20^\circ = \angle\mathrm{BCA}$ より $\mathrm{AC} \mathbin{/\!/} \mathrm{BE}$

$\angle\mathrm{BEC} = \dfrac{1}{2}(180^\circ - 20^\circ) = 80^\circ$

$\angle\mathrm{EBA} = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ$

$\angle\mathrm{BEC} = \angle\mathrm{EBA}$ より，四角形 ABEC は**等脚台形**である。

正三角形と等脚台形の**対称性**から $\triangle\mathrm{ABD} \equiv \triangle\mathrm{CED}$

$\mathrm{BD} = \mathrm{BC} = \mathrm{BE}$ より点 B は $\triangle\mathrm{CDE}$ の外心である。

$\angle\mathrm{CDE} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{CBE} = 10^\circ$

$\theta = \angle\mathrm{ADB} = \angle\mathrm{CDE} = \mathbf{10^\circ}$

【予備知識】一般に，

$b = 2a,\ b + c = 60^\circ,\ c + 2d = 120^\circ$

の関係が成り立つとき，

辺 BD を一辺とする正三角形 BDE を点 A とは反対側に作ると

四角形 ABEC は**等脚台形**で，　$\triangle\mathrm{ABD} \equiv \triangle\mathrm{CED}$

$$\boldsymbol{\theta = \frac{1}{2}c = 60^\circ - d}$$