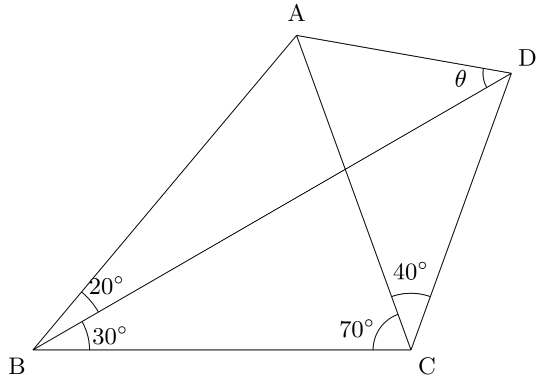
【整角四角形 $Q(20,\ 30,\ 70,\ 40)$】

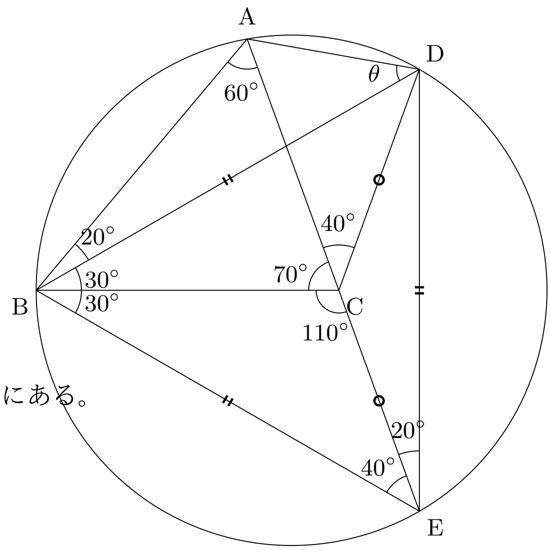
図の θ の角度を求めよ。
(折り返しでひらめく補助線の幾何より)



【求め方１】

図のように，$\triangle$BCD を辺 BC で折り返すと，
$\triangle$BDE は正三角形になる。
$\angle\mathrm{BCE} = \angle\mathrm{BCD} = 70^\circ + 40^\circ = 110^\circ$
$\angle\mathrm{BCA} + \angle\mathrm{BCE} = 70^\circ + 110^\circ = 180^\circ$ より点 C は線分 AE 上にある。
よって，$\angle\mathrm{AED} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{ACD} = 20^\circ$

$\angle\mathrm{BAE} = \angle\mathrm{BDE} = 60^\circ$
(または $\angle\mathrm{ABD} = \angle\mathrm{AED} = 20^\circ$) が成り立つ。
よって，円周角の定理の逆より四角形 ABED は同一円周上にある。
$\theta = \angle\mathrm{ADB} = \angle\mathrm{AEB} = 60^\circ - 20^\circ = \mathbf{40^\circ}$
(または $\theta = \angle\mathrm{ADB} = 180^\circ - (60^\circ + 20^\circ + 60^\circ) = \mathbf{40^\circ}$)

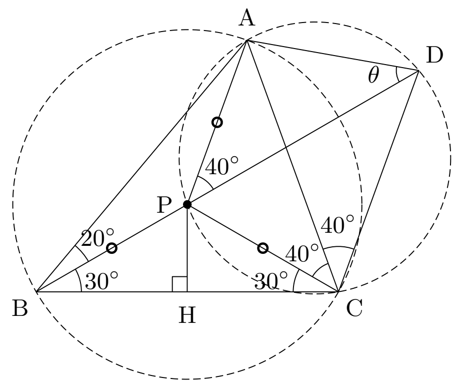


【求め方２】

図のように，$\triangle$BDC について BC の垂直二等分線で折り返すと，PB $=$ PC で

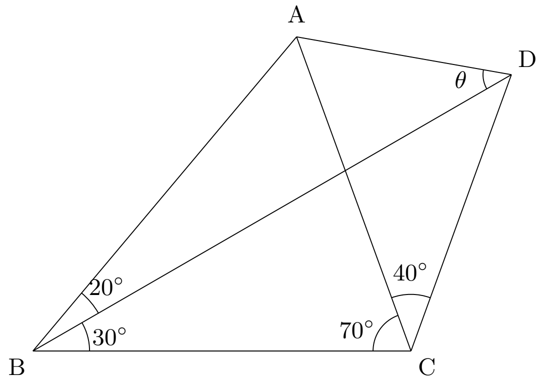
$$\angle\mathrm{BAC} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{BPC}(= 60^\circ)$$

が成り立つから，点 P は $\triangle$ABC の外心である。
よって，PA $=$ PB $=$ PC である。
$\angle\mathrm{APD} = 2\angle\mathrm{ABP} = 40^\circ = \angle\mathrm{ACD}$
よって，円周角の定理の逆より四角形 APCD は同一円周上にある。
$\theta = \angle\mathrm{ADP} = \angle\mathrm{ACP} = 70^\circ - 30^\circ = \mathbf{40^\circ}$

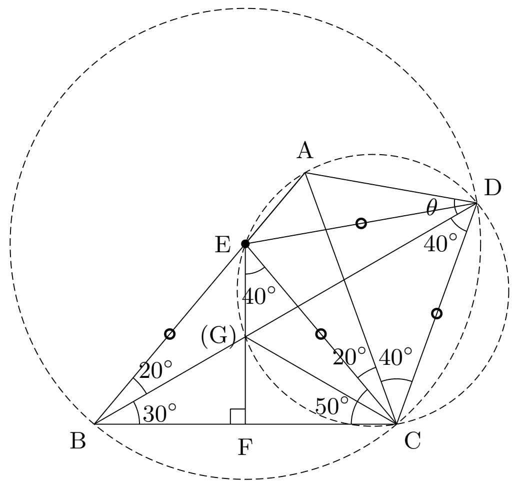


【整角四角形 20°，30°，70°，40°】

図の θ の角度を求めよ。
(折り返しでひらめく補助線の幾何より)



【求め方 3 】



図のように，△BAC について BC の垂直二等分線で折り返すと，EB = EC で

$$\angle \mathrm{BDC} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{BEC}(= 40^\circ)$$

が成り立つから，点 E は △BCD の外心である。
よって，EB = EC = ED である。
ゆえに，$\angle \mathrm{EDB} = \angle \mathrm{EBD} = 20^\circ$
$\angle \mathrm{ECD} = (70^\circ - 50^\circ) + 40^\circ = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$
より △ECD は正三角形である。
$\angle \mathrm{EAC} = \angle \mathrm{EDC} = 60^\circ$ が成り立つから
円周角の定理の逆より四角形 AECD は同一円周上にある。
$\angle \mathrm{ADE} = \angle \mathrm{ACE} = 20^\circ$ より

$$\theta = \angle \mathrm{ADB} = \angle \mathrm{ADE} + \angle \mathrm{EDB} = 20^\circ + 20^\circ = \mathbf{40^\circ}$$

【注】2 つの線分 BD, EF の交点を G とすると
$\angle \mathrm{EDG} = \angle \mathrm{EDB} = \angle \mathrm{EBD} = 20^\circ = \angle \mathrm{ECG}$ が成り立つから
円周角の定理の逆より四角形 EGCD も同一円周上にある。
つまり，五角形 AEGCD は同一円周上にある。
$\theta = \angle \mathrm{ADB} = \angle \mathrm{ADG} = \angle \mathrm{ACG} = 20^\circ + 20^\circ = \mathbf{40^\circ}$