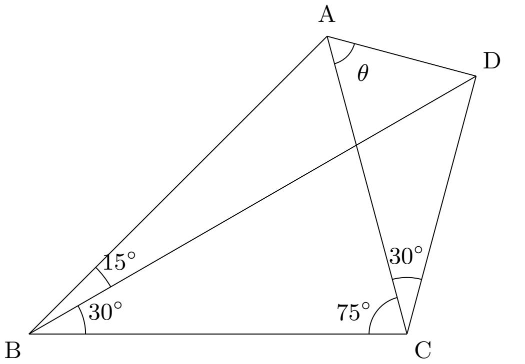
【整角四角形 $Q(15,\ 30,\ 75,\ 30)$】

図の θ の角度を求めよ。



【求め方１】(折り返しでひらめく補助線の幾何より)

図のように，$\triangle$BCD を辺 BC で折り返すと，
$\triangle$BDE は正三角形になる。

$\angle\mathrm{BCE} = \angle\mathrm{BCD} = 75^\circ + 30^\circ = 105^\circ$

$\angle\mathrm{BCA} + \angle\mathrm{BCE} = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ$ より点 C は線分 AE 上にある。

よって，$\angle\mathrm{AED} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{ACD} = 15^\circ$

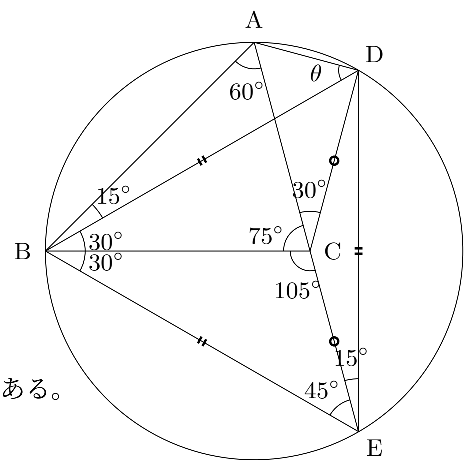
$\angle\mathrm{BAE} = \angle\mathrm{BDE} = 60^\circ$

(または $\angle\mathrm{ABD} = \angle\mathrm{AED} = 15^\circ$) が成り立つ。

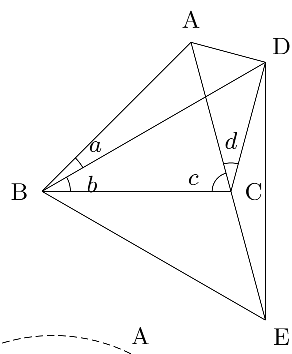
よって，円周角の定理の逆より四角形 ABED は同一円周上にある。

$\theta = \angle\mathrm{ADB} = \angle\mathrm{AEB} = 60^\circ - 15^\circ = \mathbf{45^\circ}$

(または $\theta = \angle\mathrm{ADB} = 180^\circ - (60^\circ + 15^\circ + 60^\circ) = \mathbf{45^\circ}$)



【予備知識】一般に，$2c + d = 180^\circ$ の関係が成り立つとき，
線分 BC に関して点 D と対称な点を E とすると，
点 C は線分 AE 上にある。



【求め方２】

図のように，$\triangle$BDC について BC の垂直二等分線で折り返すと，PB = PC で

$$\angle\mathrm{BAC} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{BPC}(= 60^\circ)$$

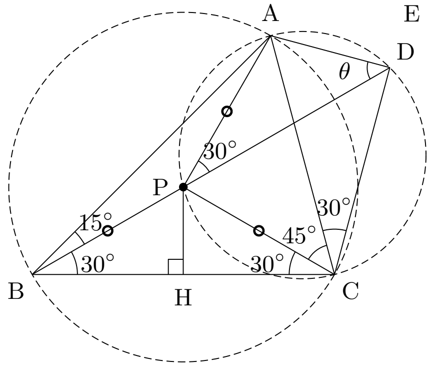
が成り立つから，点 P は $\triangle$ABC の外心である。

よって，PA = PB = PC である。

$\angle\mathrm{APD} = 2\angle\mathrm{ABP} = 30^\circ = \angle\mathrm{ACD}$

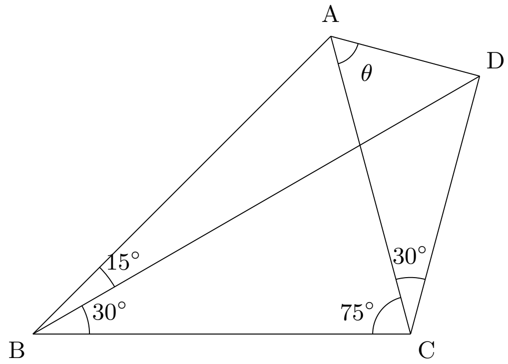
よって，円周角の定理の逆より四角形 APCD は同一円周上にある。

$\theta = \angle\mathrm{ADP} = \angle\mathrm{ACP} = 75^\circ - 30^\circ = \mathbf{45^\circ}$



【整角四角形 $Q(15,\ 30,\ 75,\ 30)$】

図の θ の角度を求めよ。



【求め方 3 】

図のように，$\triangle$BAC について BC の垂直二等分線で折り返すと，EB $=$ EC で

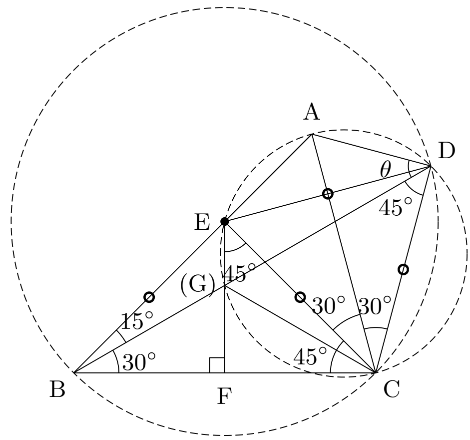
$$\angle\mathrm{BDC} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{BEC}(= 45^\circ)$$

が成り立つから，点 E は $\triangle$BCD の外心である。
よって，EB $=$ EC $=$ ED である。
ゆえに，$\angle\mathrm{EDB} = \angle\mathrm{EBD} = 15^\circ$

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{ECD} &= \angle\mathrm{ECA} + \angle\mathrm{ACD}\\ &= (75^\circ - 45^\circ) + 30^\circ = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ\end{aligned}$$

より $\triangle$ECD は正三角形である。
$\angle\mathrm{EAC} = \angle\mathrm{EDC} = 60^\circ$ が成り立つから
円周角の定理の逆より四角形 AECD は同一円周上にある。
$\angle\mathrm{ADE} = \angle\mathrm{ACE} = 30^\circ$ より

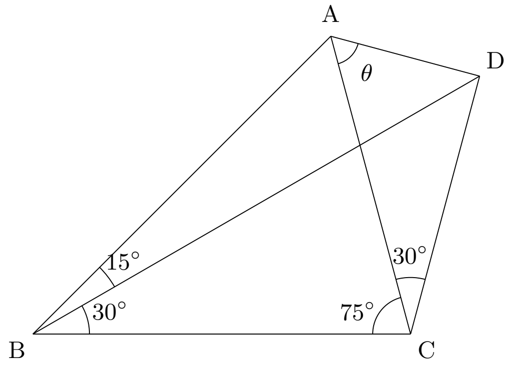
$$\theta = \angle\mathrm{ADB} = \angle\mathrm{ADE} + \angle\mathrm{EDB} = 30^\circ + 15^\circ = \mathbf{45^\circ}$$



【注】2 つの線分 BD, EF の交点を G とすると
$\angle\mathrm{EDG} = \angle\mathrm{EDB} = \angle\mathrm{EBD} = 15^\circ = \angle\mathrm{ECG}$ が成り立つから
円周角の定理の逆より四角形 EGCD も同一円周上にある。
つまり，五角形 AEGCD は同一円周上にある。
$\theta = \angle\mathrm{ADB} = \angle\mathrm{ADG} = \angle\mathrm{ACG} = 30^\circ + 15^\circ = \mathbf{40^\circ}$

【整角四角形 $Q(15,\ 30,\ 75,\ 30)$】

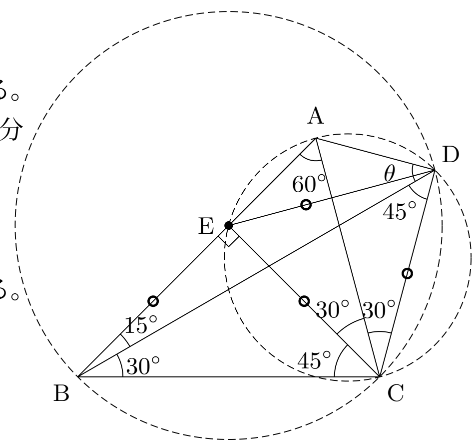
図の θ の角度を求めよ。



【求め方 4 】

$\triangle$BCD の外心を E とすると，$\mathrm{EB} = \mathrm{EC} = \mathrm{ED}$ である。
$\angle\mathrm{BEC} = 2\angle\mathrm{BDC} = 90^\circ, \angle\mathrm{CED} = 2\angle\mathrm{CBD} = 60^\circ$ より
$\triangle$BEC は直角二等辺三角形，$\triangle$CED は正辺三角形である。
$\angle\mathrm{CBE} = 45^\circ$，$\angle\mathrm{CBA} = 15^\circ + 30^\circ = 45^\circ$ より点 E は線分 AB 上にある。
$\angle\mathrm{EAC} = \angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$，$\angle\mathrm{EDC} = 60^\circ$
$\angle\mathrm{EAC} = \angle\mathrm{EDC}$ が成り立つから
円周角の定理の逆より四角形 AECD は同一円周上にある。
$\angle\mathrm{ADE} = \angle\mathrm{ACE} = 30^\circ$，$\angle\mathrm{EDB} = \angle\mathrm{EBD} = 15^\circ$ より

$$\theta = \angle\mathrm{ADB} = \angle\mathrm{ADE} + \angle\mathrm{EDB} = 30^\circ + 15^\circ = \mathbf{45^\circ}$$



【予備知識】一般に，$a + 90^\circ = c + d$ の関係が成り立つとき，
$\triangle$BCD の外心 E は線分 AB 上にある。