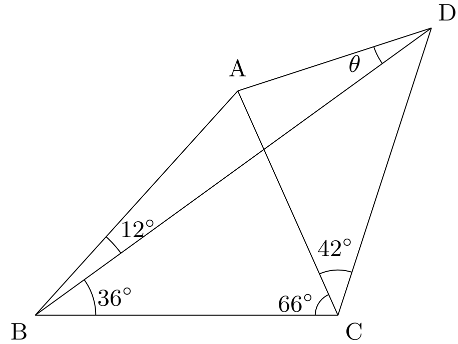
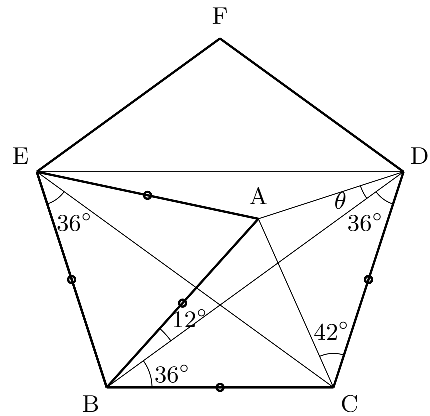
【整角四角形 $Q(12,\ 36,\ 66,\ 42)$】

図の θ の角度を求めよ。
(正五角形と正三角形を組み合わせると解決する問題)



【求め方】初等幾何

$\angle\mathrm{CBD} = \angle\mathrm{CDB} = 36^\circ$ より $\mathrm{CB} = \mathrm{CD}$
$\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{BCA} = 66^\circ$ より $\mathrm{BA} = \mathrm{BC}$
正三角形 ABE を AB からみて C と反対側に作ると,
$\mathrm{DC} = \mathrm{CB} = \mathrm{BE} = \mathrm{AB} = \mathrm{AE}$
$\angle\mathrm{CBE} = 48^\circ + 60^\circ = 108^\circ$, $\angle\mathrm{BCD} = 66^\circ + 42^\circ = 108^\circ$ より
線分 DC, CB, BE を隣り合う 3 辺とする
正五角形 CBEFD を作ることができる。
$\triangle\mathrm{DBE}$ は $\mathrm{DB} = \mathrm{DE}$, $\angle\mathrm{BDE} = 36^\circ$ の二等辺三角形である。
線分 AD は $\triangle\mathrm{DBE}$ と正三角形 ABE の対称軸である。
よって, $\theta = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{BDE} = \mathbf{36^\circ}$



別解

$\angle\mathrm{CBD} = \angle\mathrm{CDB} = 36^\circ$ より $\mathrm{CB} = \mathrm{CD}$
$\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{BCA} = 66^\circ$ より $\mathrm{BA} = \mathrm{BC}$
正三角形 ABE を AB からみて C と反対側に作ると,
$\mathrm{DC} = \mathrm{CB} = \mathrm{BE} = \mathrm{AB} = \mathrm{AE}$
$\angle\mathrm{CBE} = 48^\circ + 60^\circ = 108^\circ$, $\angle\mathrm{BCD} = 66^\circ + 42^\circ = 108^\circ$ より
四角形 EBCD は $\mathrm{BE} = \mathrm{CD}$ の等脚台形である。
$\angle\mathrm{DBE} = 12^\circ + 60^\circ = 72^\circ$
$\angle\mathrm{DEB} = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$
よって $\triangle\mathrm{DBE}$ は $\mathrm{DB} = \mathrm{DE}$, $\angle\mathrm{BDE} = 36^\circ$ の二等辺三角形である。
線分 AD は $\triangle\mathrm{DBE}$ と正三角形 ABE の対称軸である。
ゆえに, $\theta = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{BDE} = \mathbf{36^\circ}$