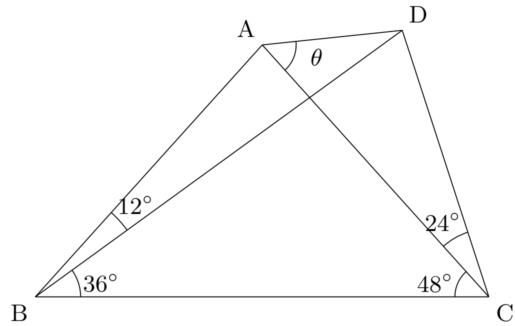
【整角四角形 $Q(12,\ 36,\ 48,\ 24)$】

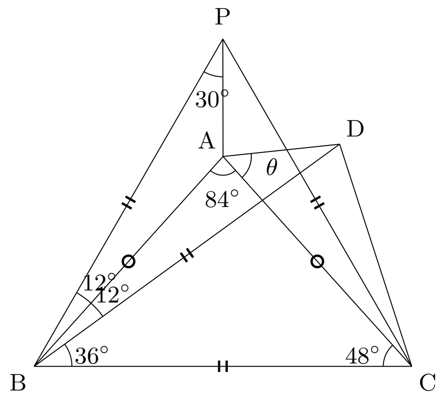
$\boxed{\text{問}}$ 図の中の，θ の角度を求めなさい。また，どのような図を使って答えを出しましたか。考えるときに使った図を書いて，必要な記号や角度を書き入れなさい。

〔1996 第 4 回　算数オリンピック・決勝・問題 6〕

【兎に角やってみよう】問題 19



【求め方 1 】折り紙でひらめく補助線の幾何の解答 (一部修正)



$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{ACB} = 48^\circ$ より $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$

$\angle\mathrm{BCD} = \angle\mathrm{BDC} = 72^\circ$ より $\mathrm{BC} = \mathrm{BD}$

図のように正三角形 PBC を作ると，二等辺三角形の対称性から

$\angle\mathrm{BPA} = \angle\mathrm{CPA} = 30^\circ$

$\triangle\mathrm{PBA}$ と $\triangle\mathrm{DBA}$ は

$\angle\mathrm{ABP} = \angle\mathrm{ABD} = 12^\circ$, AB (共通), $\mathrm{BP} = \mathrm{BD}$

であるから，$\triangle\mathrm{PBA} \equiv \triangle\mathrm{DBA}$ となる。

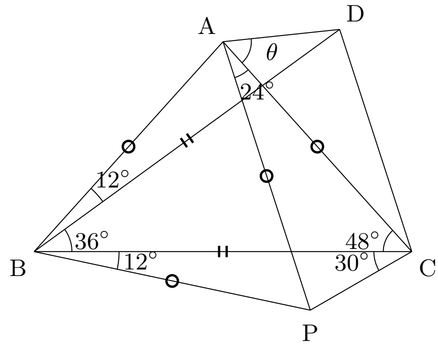
ゆえに，$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{BAP} = 180^\circ - (12^\circ + 30^\circ) = 138^\circ$

$\theta = 138^\circ - 84^\circ = \mathbf{54^\circ}$

【補足】辺 AB に関して $\triangle\mathrm{ABD}$ を折り返し，点 D を点 P に移すと $\triangle\mathrm{PBC}$ は正三角形になる。

【求め方 2 】$\boldsymbol{b = 60^\circ - 2a,\ c = 60^\circ - a,\ d = 2a}$ 正三角形 ABP を作ると，$\theta = 30^\circ$ 。

類似問題 $Q(22,\ 16,\ 38,\ 44)$



$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{ACB} = 48^\circ$ より $\angle\mathrm{BAC} = 84^\circ$，$\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$

$\angle\mathrm{BCD} = \angle\mathrm{BDC} = 72^\circ$ より $\mathrm{BC} = \mathrm{BD}$

図のように正三角形 ABP を作ると，$\mathrm{AP} = \mathrm{AC}$ より

$\triangle\mathrm{APC}$ は $\angle\mathrm{PAC} = 24^\circ$ の二等辺三角形である。

$\triangle\mathrm{ABD}$ と $\triangle\mathrm{PBC}$ は

$\angle\mathrm{ABD} = \angle\mathrm{PBC} = 12^\circ$，$\mathrm{AB} = \mathrm{PB}$，$\mathrm{BD} = \mathrm{BC}$

であるから，$\triangle\mathrm{ABD} \equiv \triangle\mathrm{PBC}$ となる。

ゆえに，$\angle\mathrm{ADB} = \angle\mathrm{PCB} = 30^\circ$

$\theta + 30^\circ = 36^\circ + 48^\circ$ より $\boldsymbol{\theta = 54^\circ}$

【求め方 3 】(図は【求め方 2 】を参考に)

$\mathrm{BD} = \mathrm{BC}$ であるから，三角形 BAD と合同な三角形 BPC を図のように作ると，

四角形 APCD は $\mathrm{AD} = \mathrm{PC}$，$\mathrm{AP} /\!/ \mathrm{DC}$ より**等脚台形**である。

$\angle\mathrm{ABP} = 60^\circ$ であるから $\triangle\mathrm{ABP}$ は正三角形である。

$\mathrm{AP} = \mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ より $\triangle\mathrm{APC}$ は $\angle\mathrm{PAC} = 24^\circ$，$\angle\mathrm{CPA} = 78^\circ$ の二等辺三角形である。

$\angle\mathrm{DAP} = \angle\mathrm{CPA} = 78^\circ$ より $\theta = 78^\circ - 24^\circ = \mathbf{54^\circ}$