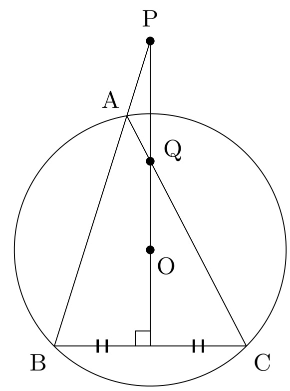
辺 BC の垂直二等分線と直線 AB, AC との交点

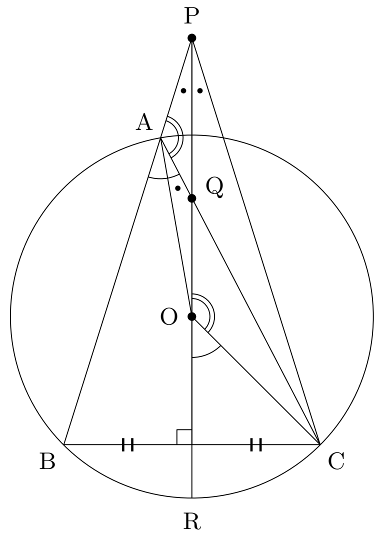
半径 R の円 O の円周上に 3 点 A, B, C がある。
辺 BC の垂直二等分線が直線 AB, AC との交わる点をそれぞれ，P, Q とすると
$$\mathrm{PO} \cdot \mathrm{QO} = R^2$$
が成り立つことを証明せよ。
ただし，AB < AC とし，2 点 P, Q は直線 BC から見て点 A と同じ側にあるとする。



(パズルでひらめく補助線の幾何学 問題 65 の改題)

【証明】

【求め方 1】



点 R は直線 PO が中心を突き抜けて円と交わる点とする。
$\overset{\frown}{\mathrm{RC}} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ より $\overset{\frown}{\mathrm{RC}}$ の中心角と $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ の円周角は等しい。

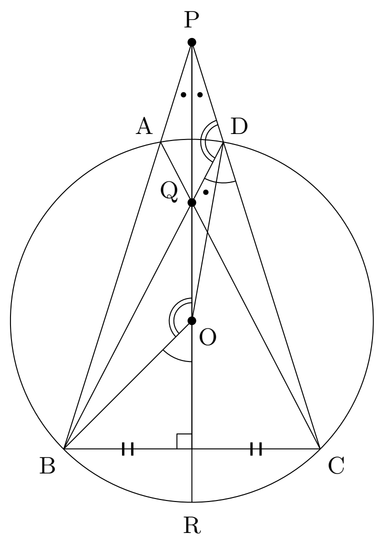
$\angle\mathrm{ROC} = \angle\mathrm{BAC}$ $\cdots$①

$\angle\mathrm{ROC} + \angle\mathrm{COP} = 180^\circ$ $\cdots$②

$\angle\mathrm{BAC} + \angle\mathrm{CAP} = 180^\circ$ $\cdots$③

①, ②, ③ より $\angle\mathrm{COP} = \angle\mathrm{CAP}$
2 点 O, A は直線 PC について同じ側にあるので，
4 点 P, C, O, A は同一円周上にある。
したがって，$\angle\mathrm{CAO} = \angle\mathrm{CPO} = \angle\mathrm{APO}$
また，$\angle\mathrm{POA} = \angle\mathrm{AOQ}$ であるから $\triangle\mathrm{POA} \backsim \triangle\mathrm{AOQ}$
対応する 2 辺の比は等しいので
$$\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{PO}} = \frac{\mathrm{QO}}{\mathrm{AO}}$$
したがって $\mathrm{PO} \cdot \mathrm{QO} = \mathrm{AO}^2 = R^2$

【求め方 2】



点 D は線分 PC と円 O の交点とすると，線分 AC と BD は点 Q で交わる。
点 R は直線 PO が中心を突き抜けて円と交わる点とする。
$\overset{\frown}{\mathrm{BR}} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ より $\overset{\frown}{\mathrm{BR}}$ の中心角と $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ の円周角は等しい。

$\angle\mathrm{BOR} = \angle\mathrm{BDC}$ $\cdots$①

$\angle\mathrm{BOR} + \angle\mathrm{BOP} = 180^\circ$ $\cdots$②

$\angle\mathrm{BDC} + \angle\mathrm{BDP} = 180^\circ$ $\cdots$③

①, ②, ③ より $\angle\mathrm{BOP} = \angle\mathrm{BDP}$
2 点 O, D は直線 PB について同じ側にあるので，
4 点 P, B, O, D は同一円周上にある。
したがって，$\angle\mathrm{QDO} = \angle\mathrm{BDO} = \angle\mathrm{BPO} = \angle\mathrm{CPO}$
また，$\angle\mathrm{POD} = \angle\mathrm{DOQ}$ であるから $\triangle\mathrm{POD} \backsim \triangle\mathrm{DOQ}$
対応する 2 辺の比は等しいので
$$\frac{\mathrm{DO}}{\mathrm{PO}} = \frac{\mathrm{QO}}{\mathrm{DO}}$$
したがって $\mathrm{PO} \cdot \mathrm{QO} = \mathrm{DO}^2 = R^2$