置換積分と証明 1

連続な関数 $f(x)$ について, 次の等式 (1), (2) を順次証明し, 定積分 (3) の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} tf(\sin t)\,dt$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin^2 x\,dx$

【解答】

(1) $x=\pi-t$ とおく, $\dfrac{dx}{dt}=-1$

x	$\frac{\pi}{2}$	$\to$	π
t	$\frac{\pi}{2}$	$\to$	0

$\sin x=\sin(\pi-t)=\sin t$ より,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\pi-t)f(\sin t)\cdot(-1)\,dt$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} tf(\sin t)\,dt$$

(2) (1) より

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)\,dx + \left\{\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)\,dx\right\}$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$$

(3) (2) より

$$\int_0^{\pi} x\sin^2 x\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{\pi^2}{4}}$$

置換積分と証明 2

$f(x)$ が $0\leqq x\leqq 1$ で連続な関数であるとき

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$$

が成り立つことを示し，これを用いて定積分 $J=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\sin x}\,dx$, $K=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,dx$ を求めよ。

【解答】

$x=\pi-t$ とおくと　　$dx=-dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	0	$\to$	π
t	π	$\to$	0

証明する等式の左辺を I とおくと,

$\sin x=\sin(\pi-t)=\sin t$ より,

$$I=\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin t)\cdot(-1)\,dt$$
$$=\pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\,dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t)\,dt$$
$$=\pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\,dt - I$$
$$\therefore\ I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$　終

$$J=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\sin x}dx$$
$$\frac{\sin x}{1+\sin x}=1-\frac{1}{1+\sin x}$$
$$\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$
$$\therefore\ \int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\sin x}\,dx=\frac{\pi}{2}\left[x-\tan x+\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\pi}$$
$$=\boldsymbol{\frac{\pi(\pi-2)}{2}}$$

$$K=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{3+\sin^2 x}\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{4-\cos^2 x}\,dx$$

$\cos x=t$ とおくと、$\sin x dx=-dt$

x	0	$\to$	π
t	1	$\to$	-1

ゆえ、

$$K=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{-1}{4-t^2}\,dt=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{4-t^2}\,dt$$
$$=\pi\int_0^1\frac{1}{4-t^2}\,dt=\frac{\pi}{4}\int_0^1\left(\frac{1}{2+t}+\frac{1}{2-t}\right)dt$$
$$=\frac{\pi}{4}\Big[\log(2+t)-\log(2-t)\Big]_0^1=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}\log 3}$$

置換積分と証明 3

a を正の定数とする。

(1) 等式 $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(a-x)\,dx$ を証明せよ。

(2) (1) の等式を利用して，定積分 $\displaystyle\int_0^a \frac{e^x}{e^x+e^{a-x}}\,dx$ を求めよ。

【解答】

(1) $a-x=t$ とおくと、 $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & a \\ \hline t & a & \to & 0 \end{array}$, $dx=-dt$ ゆえ、

$$\int_0^a f(a-x)\,dx=\int_a^0 f(t)(-dt)=\int_0^a f(t)\,dt$$
$$=\int_0^a f(x)\,dx$$

(2) $I=\displaystyle\int_0^a \frac{e^x}{e^x+e^{a-x}}\,dx$ とし，$f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+e^{a-x}}$ とする。

$\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(a-x)\,dx$ から　 $I=\displaystyle\int_0^a f(a-x)\,dx$

また, $f(x)+f(a-x)=\dfrac{e^x}{e^x+e^{a-x}}+\dfrac{e^{a-x}}{e^{a-x}+e^x}$

$=1$

よって, $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^a f(a-x)\,dx=\int_0^a dx=a$

ゆえに　 $I+I=a$ 　 したがって $\boldsymbol{I=\dfrac{a}{2}}$

置換積分と証明 4

$\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx=\int_0^a\{f(x)+f(-x)\}dx$ を示し、$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{1+e^{-x}}dx$ の値を求めよ。

【解答】

$\displaystyle\int_0^a f(-x)dx$ において、$-x=t$ とおくと、 $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & a \\ \hline t & 0 & \to & -a \end{array}$, $-dx=dt$ ゆえ、

$$\int_0^a f(-x)dx=\int_0^{-a} f(t)(-dt)=\int_{-a}^0 f(t)dt=\int_{-a}^0 f(x)dx$$

よって、$\displaystyle\int_0^a\{f(x)+f(-x)\}dx=\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(-x)dx$

$\displaystyle=\int_0^a f(x)dx+\int_{-a}^0 f(x)dx=\int_{-a}^a f(x)dx$ が成り立つ。

これを使うと、

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{1+e^{-x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{\cos^3 x}{1+e^{-x}}+\frac{\cos^3(-x)}{1+e^x}\right\}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{e^x\cos^3 x}{e^x+1}+\frac{\cos^3 x}{1+e^x}\right)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\cos x dx$$

$\sin x=t$ とおくと、 $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 0 & \to & 1 \end{array}$, $\cos x dx=dt$ ゆえ

与式 $\displaystyle=\int_0^1(1-t^2)dt=\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$

【研究】$F(x)=\displaystyle\int_{-x}^x\frac{\cos^3 t}{1+e^{-t}}\,dt$ を考えると

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_{-x}^x\frac{\cos^3 t}{1+e^{-t}}\,dt$$
$$=\frac{\cos^3 x}{1+e^{-x}}-\frac{\cos^3(-x)}{1+e^x}\cdot(-1)$$
$$=\cos^3 x\left(\frac{e^x}{e^x+1}+\frac{1}{1+e^x}\right)=\cos^3 x\cdot 1=\cos^3 x$$
$$F(x)=\int\cos^3 x\,dx=\int(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$$
$$=\int\left(\cos x-\sin^2 x\cos x\right)\,dx=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$$

$F(0)=0$ より, $C=0$

$\therefore\ F(x)=\sin x-\dfrac{1}{3}\sin^3 x$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{1+e^{-x}}dx=F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

置換積分と証明 5

関数 $f(x)$ は常に $f(x)=f(-x)$ を満たすものとする。

(1) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx=\int_0^a f(x)\,dx$ を証明せよ。

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+e^{-x}}dx$ の値を求めよ。

【解答】

(1) $x=-t$ とおくと，

x	$-a \to 0$
t	$a \to 0$

, $dx=-dt$ ゆえ,

$$\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}\,dx=\int_a^0\frac{f(-t)}{1+e^{t}}\cdot(-1)\,dt$$
$$=\int_0^a\frac{f(t)}{1+e^{t}}\,dt=\int_0^a\frac{f(x)}{1+e^{x}}\,dx$$

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}\,dx=\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}\,dx+\int_0^a\frac{f(x)}{1+e^{-x}}\,dx$$
$$=\int_0^a\frac{f(x)}{1+e^{x}}\,dx+\int_0^a\frac{f(x)}{1+e^{-x}}\,dx$$
$$=\int_0^a\left\{\frac{f(x)}{1+e^{x}}+\frac{e^{x}f(x)}{e^{x}+1}\right\}$$
$$=\int_0^a\frac{(1+e^{x})f(x)}{1+e^{x}}\,dx=\int_0^a f(x)\,dx$$

(2) $f(x)=x\sin x$ とすると，常に $f(x)=f(-x)$ が成り立つ。よって，(1) により

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+e^{-x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cdot(-\cos x)'\,dx$$
$$=\Big[x\cdot(-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)\,dx$$
$$=0+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\mathbf{1}$$