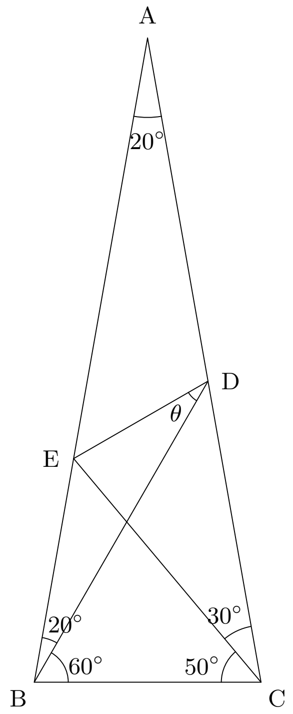
ラングレーの問題

ラングレーの問題 (フランクリンのたこ)

$\triangle$ABC は AB = AC の二等辺三角形です。図の $\angle$BDE の大きさを求めよ。



1922 年 ラングレーによって提出され，日本では佐藤大八郎氏が「数学セミナー 1967 年 6 月号」ではじめて紹介した。

ラングレーの問題解答 1

三角比版その１　類題 ($\angle \mathrm{BCE} \fallingdotseq 50^\circ$) も視野に入れれば正弦定理を 2 回，余弦定理を 1 回用います。

$\mathrm{BC}=1$, $\angle \mathrm{BDE}=\theta$ とする。$\angle \mathrm{BEC}=50^\circ$ より $\mathrm{BE}=\mathrm{BC}=1\cdots$①

$\triangle$BCD で、正弦定理より

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{BD}}{\sin 80^\circ} &= \frac{\mathrm{BC}}{\sin 40^\circ}\\
\mathrm{BD} &= \frac{\mathrm{BC}\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{1\cdot 2\sin 40^\circ\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}\\
&= 2\cos 40^\circ = 2(2\cos^2 20^\circ - 1)\\
\cos 20^\circ = a \text{ とおくと、BD} &= 2(2a^2-1)\cdots ②\\
\text{また, 3 倍角の公式}\quad \cos 3\alpha &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \text{ より、}\\
\cos 60^\circ &= 4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ\\
\frac{1}{2} &= 4a^3-3a\\
\therefore 8a^3-6a-1 &= 0\ \cdots ③\text{が成り立つ。}
\end{aligned}$$

$\triangle$BDE で、余弦定理より

$$\begin{aligned}
\mathrm{DE}^2 &= \mathrm{BE}^2+\mathrm{BD}^2-2\mathrm{BE}\cdot\mathrm{BD}\cos 20^\circ\\
\text{ここで, } \mathrm{BD}^2 &= \{2(2a^2-1)\}^2 = 16a^4-16a^2+4 = 2a(8a^3-6a-1)-4a^2+2a+4\\
&= -4a^2+2a+4 \text{ と次数下げできる}\\
\mathrm{DE}^2 &= 1^2+(-4a^2+2a+4)-2\cdot 1\cdot 2(2a^2-1)\cdot a\\
&= -8a^3-4a^2+6a+5 = -(8a^3-6a-1)-4a^2+4\\
&= 4(1-a^2) \text{ と次数下げできる}\\
\mathrm{DE} &= 2\sqrt{1-a^2} = 2\sin 20^\circ\cdots ④
\end{aligned}$$

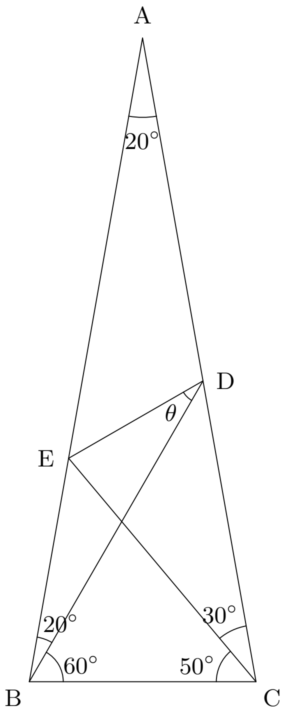
また、 $\triangle$BDE で、正弦定理より

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{BE}}{\sin\theta} &= \frac{\mathrm{DE}}{\sin 20^\circ}\\
\sin\theta &= \frac{\mathrm{BE}\sin 20^\circ}{\mathrm{DE}} = \frac{1\cdot\sin 20^\circ}{2\sin 20^\circ}\\
&= \frac{1}{2} \qquad \theta+40^\circ < 180^\circ\text{であるので } \theta = 30^\circ\ \boxed{\text{答}}
\end{aligned}$$

ラングレーの問題

ラングレーの問題 (フランクリンのたこ)

$\triangle$ABC は AB = AC の二等辺三角形です。図の $\angle$BDE の大きさを求めよ。



1922 年 ラングレーによって提出され，日本では佐藤大八郎氏が「数学セミナー 1967 年 6 月号」ではじめて紹介した。

ラングレーの問題解答 2

三角比版その 2 類題 ($\angle$BCE ≒ 50°) も視野に入れれば正弦定理を 3 回，余弦定理を 0 回用います。

BC = 1, $\angle$BDE = θ とする。$\angle$BEC = 50° より BE = BC = 1 $\cdots$ ①

$\triangle$BCD で、正弦定理より

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{BD}}{\sin 80^\circ} &= \frac{\mathrm{BC}}{\sin 40^\circ}\\ \mathrm{BD} &= \frac{\mathrm{BC}\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{1\cdot 2\sin 40^\circ\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}\\ &= 2\cos 40^\circ \cdots ②\end{aligned}$$

また、 $\triangle$BDE で、正弦定理より

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{BE}}{\sin\angle\mathrm{BDE}} &= \frac{\mathrm{BD}}{\sin\angle\mathrm{BED}}\\ \frac{\mathrm{BE}}{\sin\theta} &= \frac{\mathrm{BD}}{\sin\{180^\circ-(\theta+20^\circ)\}} = \frac{\mathrm{BD}}{\sin(\theta+20^\circ)}\\ \text{①，②より}\ \frac{1}{\sin\theta} &= \frac{2\cos 40^\circ}{\sin(\theta+20^\circ)}\\ \boldsymbol{\sin(\theta+20^\circ)} &\;\boldsymbol{=}\; \boldsymbol{2\sin\theta\cos 40^\circ}\cdots ③\\ \sin(\theta+20^\circ) &= \sin\theta\cos 20^\circ+\cos\theta\sin 20^\circ\text{から}\\ \tan\theta &= \frac{\sin 20^\circ}{2\cos 40^\circ-\cos 20^\circ}\text{と変形できますがこれが,}\\ &= \cdots\cdots = \frac{1}{\sqrt{3}}\text{までなかなか変形できませんでした。}\\ \text{そこで,③を強引に解いて,}\theta &= 30^\circ\text{を導きます。}\\ \underline{2}\sin(\theta+20^\circ)\underline{\cos 60^\circ} &= 2\sin\theta\cos 40^\circ\\ \text{積和公式 } 2\sin\alpha\cos\beta &= \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\text{ により}\\ \sin(\theta+80^\circ)+\sin(\theta-40^\circ) &= \sin(\theta+40^\circ)+\sin(\theta-40^\circ)\\ \sin(\theta+80^\circ)-\sin(\theta+40^\circ) &= 0\end{aligned}$$

和積公式 $\sin A-\sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$ により

$2\cos\dfrac{(\theta+80^\circ)+(\theta+40^\circ)}{2}\sin\dfrac{(\theta+80^\circ)-(\theta+40^\circ)}{2} = 0$

$2\cos(\theta+60^\circ)\sin 20^\circ = 0 \therefore \cos(\theta+60^\circ) = 0$

$\theta+40^\circ < 180^\circ$ であるので $\theta+60^\circ = 90^\circ \quad \therefore\theta = 30^\circ$ $\boxed{\text{答}}$

【補足】tomo さんの解答

方程式　$\boldsymbol{\sin(\theta+20^\circ) = 2\sin\theta\cos 40^\circ}$ は tan を用いると次のように解ける。

$\sin\theta\cos 20^\circ+\cos\theta\sin 20^\circ = 2\sin\theta\cos 40^\circ$

両辺を $\cos\theta$ で割って

$\tan\theta\cos 20^\circ+2\sin 20^\circ = 2\tan\theta\cos 40^\circ$

よって

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{\sin 20^\circ}{2\cos 40^\circ-\cos 20^\circ}\\ &= \frac{\sin 20^\circ}{2\cos(60^\circ-20^\circ)-\cos 20^\circ}\\ &= \frac{\sin 20^\circ}{2\left(\dfrac{1}{2}\cos 20^\circ+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-\cos 20^\circ}\\ &= \frac{\sin 20^\circ}{\sqrt{3}\sin 20^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

$\theta+40^\circ < 180^\circ$ であるので $\theta+60^\circ = 90^\circ \quad \therefore\theta = 30^\circ$ $\boxed{\text{答}}$