H11 センター数学I・A 99/01/16　NO1

第１問 (必答問題)(配点 40)

[1] a, b を自然数とし、2 次関数

$$y = x^2 - 4ax + 4a^2 - 4a - 3b + 9$$

のグラフを C とする。このとき、C は頂点の座標が

$$\left(\boxed{ア}\,a,\ -\boxed{イ}\,a - \boxed{ウ}\,b + \boxed{エ}\right)$$

の放物線である。

(1) グラフ C が x 軸と交わらないとき

$$a = \boxed{オ},\ b = \boxed{カ}$$

である。

(2) 2 次方程式

$$x^2 - 4ax + 4a^2 - 4a - 3b + 9 = 0$$

が二つの解をもつとする。その二つの解の差が $2\sqrt{11}$ であるとき

$$4a + 3b = \boxed{キク}$$

である。したがって、a, b の値は

$$a = \boxed{ケ},\ b = \boxed{コ}$$

である。

(3) グラフ C を y 軸方向に -3 だけ平行移動し、さらに x 軸に関して対称移動すると、2 次関数

$$y = -x^2 + 8x + 1$$

のグラフになるとする。このとき

$$a = \boxed{サ},\ b = \boxed{シ}$$

である。

[2] 赤, 青, 黄, 緑の 4 色のカードが 5 枚ずつ計 20 枚ある。各色のカードには、それぞれ 1 から 5 までの番号が一つずつ書いてある。この 20 枚の中から 3 枚を一度に取り出す。

(1) 3 枚がすべて同じ番号となる確率は $\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セソ}}$ である。

(2) 3 枚が色も番号もすべて異なる確率は $\dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チツ}}$ である。

(3) 3 枚のうち赤いカードがちょうど 1 枚含まれる確率は $\dfrac{\boxed{テト}}{\boxed{ナニ}}$ である。

(4) 3 枚の中にある赤いカードの枚数の期待値は $\dfrac{\boxed{ヌ}}{\boxed{ネ}}$ である。

第２問 (必答問題)(配点 40)

[1]

(1) a, b, c, d を定数とする。x についての二つの整式

$$A = x^2 + x - 1,\ B = x^4 + ax^3 + bx^2 + x + 2$$

に対して、B を A で割ったとき、商が $A + c$ で、余りが d となるとする。このとき

$$a = \boxed{ア},\ b = \boxed{イ},\ c = \boxed{ウ},\ d = \boxed{エ}$$

である。また

$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

のとき

$$A = \boxed{オ},\ B = \boxed{カキ}$$

である。

(2) 実数 a, b について次の条件を考える。

⓪　$a > 0$ かつ $b > 0$

①　$a + b > 0$

②　$|\,a\,| + |\,b\,| > 0$

③　$a + b > 0$ かつ $ab > 0$

④　2 次関数 $y = x^2 - ax + b$ のグラフが、x 軸の正の部分と 2 点で交わる

①〜④ のうちで、⓪ と同値な条件は $\boxed{ク}$ である。また、①〜④ のうちで、$\boxed{ケ}$ は他のすべての条件の十分条件であり、$\boxed{コ}$ は他のすべての条件の必要条件である。

さらに、⓪ の否定と同値な条件は次の ⑤〜⑧ のうち $\boxed{サ}$ である。

⑤　$a + b \leqq 0$ かつ $ab \leqq 0$

⑥　$a + b \leqq 0$ または $ab \leqq 0$

⑦　$a < 0$ または $b < 0$

⑧　$a < 0$ かつ $b < 0$

[2] 円に内接する四角形 ABCD は

$$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = 2\sqrt{2}\,,\ \mathrm{BD} = 2\sqrt{3}\,,\ \angle\mathrm{ABC} = 120^\circ$$

を満たすとする。ただし、AD>CD とする。このとき

$$\mathrm{AC} = \boxed{シ}\sqrt{\boxed{ス}}\,,\ \angle\mathrm{BCD} = \boxed{セソ}^\circ$$

である。
また、

$$\mathrm{AD} = \boxed{タ} + \sqrt{\boxed{チ}}\,,\ \mathrm{CD} = \boxed{タ} - \sqrt{\boxed{チ}}$$

であり、四角形 ABCD の面積は $\boxed{ツ}\sqrt{\boxed{テ}}$ である。

第 3 問 (選択問題)(配点 20)

初項が -100 で公差が 5 の等差数列 a_n の一般項は

$$a_n = \boxed{\text{ア}}(n - \boxed{\text{イウ}})$$

である。この数列を次のように 1 個，2 個，2^2個，2^3個，$\cdots\cdots$ と区画に分ける。

$$\mid a_1 \mid a_2,\ a_3 \mid a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7 \mid a_8 \cdots\cdots$$

(1) m 番目の区画の最初の項を b_m とおくと

$$b_8 = \boxed{\text{エオカ}}$$

であり

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_8 = \boxed{\text{キクケ}}$$

である。

(2) 6 番目の区画に入る項の和は $\boxed{\text{コサシス}}$ である。

第 4 問 (選択問題)(配点 20)

△ABC の辺 AB,AC 上にそれぞれ点 D,E を

$$\mathrm{AD} : \mathrm{BD} = t : 1\ ,\ \ \mathrm{AE} : \mathrm{EC} = 1 : (t+1)$$

となるようにとる。

さらに BE と CD の交点と A を結ぶ直線が BC と交わる点を F とおく。

次の文中の $\boxed{\text{エオ}}$ 〜 $\boxed{\text{シス}}$ については、当てはまる文字を A〜F のうちから選べ。ただし、 エとオ, カとキ, クとケ, コとサ, シとスは、それぞれ解答の順序を問わない。

(1) DE が BC に平行になるとき

$$t = \frac{\boxed{\text{アイ}} + \sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{2}$$

である。

(2) △ABF と △AFC の面積をそれぞれ S_1, S_2 とするとき

$$\begin{aligned} S_1 : S_2 &= \boxed{\text{エオ}} : \boxed{\text{カキ}} \\ &= \boxed{\text{クケ}} \sin\angle\mathrm{BAF} : \boxed{\text{コサ}} \sin\angle\mathrm{FAC} \end{aligned}$$

である。また、AF が △ABC の内心を通るならば

$$\mathrm{BF} : \mathrm{FC} = \boxed{\text{シス}} : \mathrm{AC}$$

であり、さらに AC=12AB のとき

$$t = \boxed{\text{セ}}$$

である。