オイラー線

次のことが成り立つことを証明せよ。

(モノグラフ　幾何学　－発見的研究法－　問題 2 の 4 , 5 より)

(1) $\triangle$ABC の垂心を H とし，外心 O から BC に下ろした垂線の足を M とすると，

$$\mathrm{AH} = 2\mathrm{OM}$$

である。

(2) 三角形の垂心を H，重心を G，外心を O とすると，
3 点 H, G, O は一直線上にあり，

$$\mathrm{OG} : \mathrm{GH} = 1 : 2$$

である。

【証明】

(1) B を通る直径を BD とすると $\mathrm{DA} \perp \mathrm{AB}$

$\therefore\ \mathrm{DA} /\!/ \mathrm{CH}$

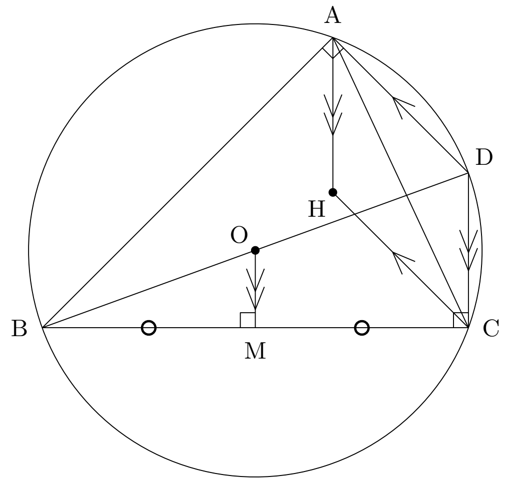
同様に $\mathrm{DC} /\!/ \mathrm{AH}$

四角形 AHCD は平行四辺形であるから

$\mathrm{AH} = \mathrm{DC}$

$\triangle$BCD で中点連結定理より $\mathrm{DC} = 2\mathrm{OM}$

したがって $\mathrm{AH} = 2\mathrm{OM}$



(2) OH, AM の交点を G とすると，$\mathrm{AH} /\!/ \mathrm{OM}$ から

$\mathrm{AG} : \mathrm{GM} = \mathrm{AH} : \mathrm{OM} = 2 : 1$

したがって，点 G は $\triangle$ABC の重心である。

ゆえに，三角形の垂心，重心，外心は一直線上にあり，

$\mathrm{OG} : \mathrm{GH} = 1 : 2$

が成り立つ。

(注) 3 点 O, H, G を通る直線を，

オイラー線 (Euler Line)

という。

三角形の外心，重心，垂心は一直線上に並び，

外心と重心の距離 : 重心と垂心の距離 $= 1 : 2$ である。