

—— 内接四角形の対角線が直交するときの円の半径 ——

半径 R の円に内接する四角形 $ABCD$ の対角線は点 H で直交する。

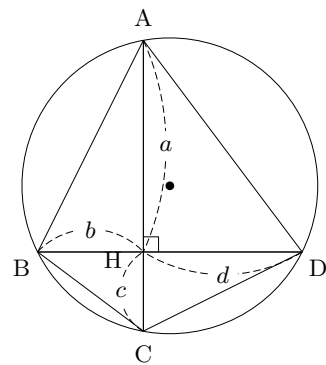
$AH = a$, $BH = b$, $CH = c$, $DH = d$ のとき

$$4R^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

が成り立つ。これは辺の長さを用いて

$$4R^2 = AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$$

と書ける。



【証明】

方べきの定理より $ac = bd$

点 H を原点とし、直線 BD を x 軸にとると、各頂点の座標は

$A(0, a)$, $B(-b, 0)$, $C(0, -c)$, $D(d, 0)$

のように書けるから、円の中心を P とすると、 P の座標は

$$P\left(\frac{d-b}{2}, \frac{a-c}{2}\right)$$

$$R^2 = PA^2 = \left(0 - \frac{d-b}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{a-c}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{b-d}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+c}{2}\right)^2$$

$$4R^2 = (b^2 - 2bd + d^2) + (a^2 + 2ac + c^2)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ac - bd) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

$$= (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) = AB^2 + CD^2$$

$$= (a^2 + d^2) + (b^2 + c^2) = AD^2 + BC^2$$

