係数が実数である方程式の虚数解

係数が実数である方程式の虚数解

2 次方程式の解は公式からわかるように，係数が実数である 2 次方程式が虚数解 α をもつと，他の解は α と共役な複素数 $\overline{\alpha}$ である。

一般に，係数が実数である方程式が虚数解 $\alpha = a + b\,i$ をもつと，それと共役な複素数 $\overline{\alpha} = a - b\,i$ も，この方程式の解である。

0 でない複素数 α について，次のことが成り立つ。

$\boldsymbol{\alpha}$ **が実数** $\iff$ $\boldsymbol{\overline{\alpha} = \alpha}$ ，　$\boldsymbol{\alpha}$ **が純虚数** $\iff$ $\boldsymbol{\overline{\alpha} = -\alpha}$

また，2 つの複素数 α，β の和，差，積，商と共役な複素数について，次のことが成り立つ。

1. $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$　　$\overline{\alpha - \beta} = \overline{\alpha} - \overline{\beta}$
2. $\overline{\alpha\,\beta} = \overline{\alpha}\;\overline{\beta}$　　$\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)} = \dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$
3. $\overline{\alpha^n} = (\overline{\alpha})^n$ (n は自然数)　　4. k が実数のとき $\overline{k} = k$，$\overline{k\alpha} = k\overline{\alpha}$

【解説】　例えば，p，q，r，s を実数とするとき，3 次方程式

$p\,x^3 + q\,x^2 + r\,x + s = 0$ ……① が虚数解 $\alpha = a + b\,i$ をもつと

$$p\,\alpha^3 + q\,\alpha^2 + r\,\alpha + s = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

②の両辺と共役な複素数を考えると

$$\overline{p\,\alpha^3 + q\,\alpha^2 + r\,\alpha + s} = \overline{0} \qquad \text{また}\ \overline{0} = 0$$

性質 1.から　$\overline{p\,\alpha^3} + \overline{q\,\alpha^2} + \overline{r\,\alpha} + \overline{s} = 0$

p，q，r，s が実数であるから

性質 4 から　$p\,\overline{\alpha^3} + q\,\overline{\alpha^2} + r\,\overline{\alpha} + s = 0$

性質 3 から　$p\,(\overline{\boldsymbol{\alpha}})^3 + q\,(\overline{\boldsymbol{\alpha}})^2 + r\,\overline{\boldsymbol{\alpha}} + s = 0$

この等式は ① に $x = \overline{\alpha}$ を代入したものであり，方程式 ① が $\overline{\boldsymbol{\alpha}}$ の解にもつことを示している。

練習 1

方程式 $3x^3 - ax^2 + bx + 20 = 0$ の 1 つの解が $1 - 3i$ であるとき，実数 a，b の値と，他の解を求めよ。

【解答】係数が実数である方程式が虚数解 $1 - 3i$ をもつから，$1 + 3i$ も解である。

$(1 + 3i) + (1 - 3i) = 2$，$(1 + 3i)(1 - 3i) = 10$ より 左辺は $x^2 - 2x + 10$ を因数にもつ。

3 次の係数と定数項に注目すると

$3x^3 - ax^2 + bx + 20 = (3x + 2)(x^2 - 2x + 10)$

と因数分解できる。また，

$(3x + 2)(x^2 - 2x + 10) = 3x^3 - 4x^2 + 26x + 20$

と展開できるから，係数を比較して

$\boldsymbol{a = 4,\ b = 26}$

$(3x + 2)(x^2 - 2x + 10) = 0$ を解くと，$x = -\dfrac{2}{3}$，$1 \pm 3i$

よって，他の解は $\boldsymbol{-\dfrac{2}{3},\ 1 + 3i}$

3 次方程式の解と係数の関係

3 次方程式の解と係数の関係

3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の 3 つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とすると

① **解と係数の関係** $\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}}$

② **因数分解** $\boldsymbol{ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}$

【証明】$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とすると，$x=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ が方程式 $P(x)=0$ の解であるから，

$$P(\alpha)=0,\ P(\beta)=0,\ P(\gamma)=0$$

因数定理より $P(x)$ は $x-\alpha,\ x-\beta,\ x-\gamma$ を因数にもつ。k を定数とするとき，

$$P(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

$P(x)$ の x^3 の項の係数を比較すると　　$k=a$ よって ② が得られる。

② の右辺を展開すると

$$ax^3+bx^2+cx+d=ax^3-a(\alpha+\beta+\gamma)x^2+a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-a\,\alpha\beta\gamma$$

この両辺の各項の係数を比較すると

$$b=-a(\alpha+\beta+\gamma),\ c=a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha),\ d=-a\,\alpha\beta\gamma$$

したがって，① が得られる。

練習 2

3 次方程式 $x^3+x^2+x+3=0$ の 3 つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とするとき，次の値を求めよ。

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　　(2) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

(3) $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$

【解答】解と係数の関係から

$$\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=-1,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1,\ \alpha\beta\gamma=-3}$$

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=(-1)^2-2\cdot1=\boldsymbol{-1}$

(2) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$ より

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3+\gamma^3&=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma\\&=(-1)(-1-1)+3\cdot(-3)=\boldsymbol{-7}\end{aligned}$$

(3) $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=1^2-2\cdot(-3)\cdot(-1)=\boldsymbol{-5}$

練習 3

x の 3 次方程式 $x^3+px+q=0$ の 3 つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とすると，次の値を $p,\ q$ で表せ。

$$(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$$