● 倍数マジック

3 つの素数で割った余りから 2 桁の数を当てるマジックに挑戦します。
好きな 2 桁の整数を選んでもらい，その数を 7 で割ったときの余り，5 で割ったときの余り，3 で割ったときの余りをそれぞれ尋ねて，選んだ数を当てるマジックです。

【例題】

7 で割ったときの余りが 1 ，
5 で割ったときの余りが 4 ，
3 で割ったときの余りが 1
である。2 桁の整数を求めよ。

《タネ明かし》
2 桁の整数を 7 で割ったときの余りは，0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 の 7 通りです。
これらの余りごとに 2 桁の整数を並べた表 (図 1) を用意します。
7 で割ったときの余りは 1 なので，余りが 1 の列に注目します。(図 2)
次に 5 で割った余りは 4 なので，この列の中で余りが 4 である数，**29，64，99** に絞られます。
そして，3 で割った余りは 1 なので，選んだ数は **64** であることがわかります。

図 1

0	1	2	3	4	5	6
			10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34
35	36	37	38	39	40	41
42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62
63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76
77	78	79	80	81	82	83
84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97
98	99					

図 2

1
15
22
29
36
43
50
57
64
71
78
85
92
99

【解答】 $\boxed{\text{別}}$ **百五減算 (中国式剰余の定理)** http://www.compassare.org/mult-div.html
(チャレンジ！整数の問題 p.104 ～ 105)
3 で割ると 1 余る，5 と 7 の公倍数の最小値を求める。 $2 \times 5 \times 7 = \mathbf{70}$
5 で割ると 1 余る，3 と 7 の公倍数の最小値を求める。 $2 \times 5 \times 7 = \mathbf{21}$
7 で割ると 1 余る，3 と 5 の公倍数の最小値を求める。 $3 \times 5 \times 7 = \mathbf{15}$
このとき，

$$\boldsymbol{N = 70 \cdot 1 + 21 \cdot 4 + 15 \cdot 1 = 169}$$

は 3 で割ると 1 余り，5 で割ると 4 余り，7 で割ると 1 余る。
この条件を満たす整数は，3, 5, 7 の最小公倍数である 105 おきに現れるから，
$\boldsymbol{105k + 169}$ (k は整数)
の形に表される。
2 桁の整数は $k = -1$ として，求める整数は **64** である。

中国式剰余定理 (百五減算)

この定理は,『孫子算経』という古代中国の本に登場していることから欧米で Chinese remainder theorem と呼ばれる，数の余りに関する定理です。『孫子算経』には「ある数を 3 で割ると 2 余り，5 で割ると 3 余り，7 で割ると 2 余るという。その数は何か」という問題が載っており，この問題を
「3 で割ると 2 余る数に 140 があり，5 で割ると 3 余る数に 63 があり，7 で割ると 2 余る数に 30 がある。この 3 つの数をすべて加えると 233 となるが，この 233 から 105 を次々に引いて行くと 128, 23 となり，23 が条件を満たす最小の数である」
という風に解いています。この 105 は割る数の積 $3 \times 5 \times 7$ から来ており，この数から，和算ではこの算法を**百五減算**と呼びます。

それでは何故この方法で解けるのでしょうか。
a は 5 でも 7 でも割り切れるが，3 で割ると 2 余る数,
b は 3 でも 7 でも割り切れるが，5 で割ると 3 余る数,
c は 3 でも 5 でも割り切れるが，7 で割ると 2 余る数
とします。
上の解法の 140 が a に当たり，63 が b に当たり，30 が c に当たることを確かめてください。
a の場合，140 を素因数分解すると $5 \times 7 \times 22$ です。5×7 が入っているので，5 でも 7 でも割り切れます。
ここで $M = a + b + c$ という数字を作ってみますと，M を 3 で割ると 2 余り，5 で割ると 3 余り，7 で割ると 2 余ります。
従って $140 + 63 + 30 = 233$ は確かに条件を満たす数ですが，そのような数は 105 おきに無限に存在するということを述べているのが，**中国式剰余定理**です。

$\boxed{1}$ 2 で割ると 1 余り，3 で割ると 2 余る数は何か。

【解答】
1 から 12 までの数について，2 および 3 で割った余りを表にすると以下のようになります。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2 で割った余り	1	0	1	0	**1**	0	1	0	1	0	**1**	0
3 で割った余り	1	2	0	1	**2**	0	1	2	0	1	**2**	0

2 と 3 は互いに素な数ですので，$2 \times 3 = 6$ 種類のパターンが現れ，$n = 1 \sim 6$ のパターンが $n = 7 \sim 12$ でも繰り返されています。この表から，求める数は 5, 11 であることが分かり，さらに 6 ずつ加えた 17, 23, 29, $\cdots$ が同じ性質を持った数字であると予想できます。そして，互いに素な p 個の数で割った余りのパターンは，その p 個の数の積を周期として繰り返すということを述べているのが中国式剰余定理なのです。
これを『孫子算経』のやり方で解くと，3 の倍数のうち 2 で割ると 1 余る数である 3, 9, 15 等を見つけ，また 2 の倍数のうち 3 で割ると 2 余る数である 2, 8, 14 等を見つけ，その和を取ると 5, 11, 17, $\cdots$ という求める数字を見つけることができます。

もとの百五減算に戻りますと，1 から 105 までの数を 3, 5, 7 で割った余りのパターンはすべて異なります。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	**15**	$\cdots$	**21**		**70**		105
3 で割った余り	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	**0**	$\cdots$	**0**		**1**		0
5 で割った余り	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	**0**	$\cdots$	**1**		**0**		0
7 で割った余り	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6	0	**1**	$\cdots$	**0**		**0**		0

中国剰余定理

$m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_n$ が正の整数でどの 2 つの対をとってもそれらは互いに素である。
$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ は任意の n 個の整数である。
このとき合同式 $x \equiv a_i \pmod{m_i},\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ は共通の解をもち，どの 2 つの解も $m_1 m_2 \cdots m_n$ を法として合同である。